

Über die Summe beliebiger und die Differenz aufeinanderfolgender Primzahlen

Autor(en): **Rieger, G.J.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **18 (1963)**

Heft 5

PDF erstellt am: **08.08.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-22645>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

bisherigen Ergebnisse können wir auch die Lösung dieser abgeänderten Aufgabe angeben. Haben nämlich die 3 rationalen Nullstellen von $f(x)$ und die 2 rationalen Nullstellen von $f'(x)$ den Hauptnenner n , so setzen wir $x = \tilde{x}/n$ und erhalten $f(x) = f(\tilde{x}/n) = \tilde{f}(\tilde{x})$. Die Funktionen $\tilde{f}(\tilde{x})$ und $\tilde{f}'(\tilde{x})$ besitzen dann lauter ganzzahlige Nullstellen. Für die Nullstellen von $\tilde{f}(\tilde{x})$ gelten damit die in (5) gegebenen Darstellungen. Wegen $x = \tilde{x}/n$ erhält man die Nullstellen von $f(x)$ aus denen von $\tilde{f}(\tilde{x})$ durch Division mit der natürlichen Zahl n .

KARL ZUSER, Ingolstadt

Über die Summe beliebiger und die Differenz aufeinanderfolgender Primzahlen

Wir bezeichnen mit kleinen lateinischen Buchstaben natürliche Zahlen, mit p eine Primzahl, mit $:=$ Gleichheit nach Definition, mit \wedge das «und» der Logik, mit $A \{ * : \dots \}$ die Anzahl der $*$ mit den Eigenschaften \dots und mit C eine absolute positive Konstante.

Wir gehen aus von zwei geläufigen Ergebnissen der elementaren additiven Primzahltheorie. SCHNIRELMANN¹⁾ hat bewiesen, dass die Folge der Zahlen der Gestalt $p_1 + p_2$ ($p_{1,2}$ prim) positive asymptotische Dichte hat; PRACHAR²⁾ hat gezeigt, dass die Folge der Zahlen der Gestalt $p^+ - p$, wenn p^+ die der Primzahl p folgende Primzahl bezeichnet, positive asymptotische Dichte hat. Wir nehmen beide Fragestellungen zusammen und beweisen einen verwandten Satz für Zahlenpaare in der Ebene:

Satz 1. *Es gibt positive Konstanten C_1, C_2, C_3 derart, dass aus $x > C_1$ folgt*

$$A \{ m, n : m < x \wedge n < C_2 \log x \wedge m = p_1 + p_2 \wedge n = p_2^+ - p_2 \wedge p_{1,2} \text{ prim} \} > C_3 x \log x. \quad (1)$$

Beweis. Mit

$$f(m, n) := A \{ p_1, p_2 : p_1 + p_2 = m \wedge p_2^+ - p_2 = n \}$$

kann man für (1) auch

$$B(x) := A \{ m, n : m < x \wedge n < C_2 \log x \wedge f(m, n) > 0 \} > C_3 x \log x \quad (2)$$

schreiben. Nach der Schwarzschen Ungleichung ist

$$\left(\sum_{m < x} \sum_{n < C_2 \log x} f(m, n) \right)^2 \leq B(x) \sum_{m < x} \sum_{n < C_2 \log x} f^2(m, n). \quad (3)$$

Es ist

$$\begin{aligned} f(m, n) &\leq A \{ p : p < m \wedge (p \wedge m - p \wedge n + p \text{ prim}) \} \\ &< C_4 \frac{x}{\log^3 x} \prod_{p | m n (m+n)} \left(1 + \frac{1}{p} \right)^2 \quad (m < x, x > 2) \end{aligned}$$

nach der Brunschen Siebmethode³⁾. Mit

$$P_m := \prod_{p | m} \left(1 + \frac{1}{p} \right)^4 \quad (4)$$

¹⁾ Vgl. etwa [1], 150–153.

²⁾ Vgl. etwa [1], 154–155.

³⁾ Vgl. [1], II. Satz 4.2 und I. (5.23).

folgt

$$\sum_{m < x} \sum_{n < C_2 \log x} f^2(m, n) < C_4^2 \frac{x^2}{\log^6 x} \sum_{m < x} \sum_{n < C_2 \log x} P_m P_n P_{m+n}. \quad (5)$$

Nach der Schwarzschen Ungleichung ist

$$\left. \begin{aligned} \sum_{m < u} \sum_{n < v} P_m P_n P_{m+n} &\leq \sum_{n < v} P_n \left(\sum_{m < u} P_m^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{m < u} P_{m+n}^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \sum_{n < v} P_n \sum_{j < u+v} P_j^2 < C_5 v (u + v) \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

wegen (4) und

$$\sum_{j < w} \prod_{p|j} \left(1 + \frac{1}{p} \right)^s < C(s) w$$

mit einer nur von s abhängigen positiven Konstanten C(s)⁴). Aus (5) und (6) folgt

$$\sum_{m < x} \sum_{n < C_2 \log x} f^2(m, n) < C_6 \frac{x^3}{\log^5 x} \quad (x > 2). \quad (7)$$

Ferner ist

$$\left. \begin{aligned} \sum_{m < x} \sum_{n < C_2 \log x} f(m, n) &= A \{p_1, p_2: p_1 + p_2 < x \wedge p_2^+ - p_2 < C_2 \log x\} \\ &\geq A \left\{ p_1: p_1 < \frac{x}{2} \right\} A \left\{ p_2: p_2 < \frac{x}{2} \wedge p_2^+ - p_2 < C_2 \log x \right\} \\ &> C_8 \left(\frac{x}{\log x} \right)^2 \quad (x > C_7) \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

wegen der Čebyshev'schen Formel

$$A \{p: p < y\} > C_9 \frac{y}{\log y} \quad (y > 2)$$

und wegen

$$A \{p: p < y \wedge p^+ - p < C_2 \log y\} > C_{11} \frac{y}{\log y} \quad (y > C_{10})$$

bei geeignetem C₂ > 0⁵). Aus (3), (7) und (8) folgt (2) und damit die Behauptung.

Man gelangt zu einigen interessanten Verallgemeinerungen von Satz 1, wenn man zum obigen Beweis frühere Überlegungen⁶) hinzunimmt. G. J. RIEGER, München⁷)

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] KARL PRACHAR, *Primzahlverteilung* (Springer-Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1957).
- [2] G. J. RIEGER, *Über ein lineares Gleichungssystem von Prachar mit Primzahlen* (Erscheint im Journal für die reine und angewandte Mathematik).
- [3] G. J. RIEGER, *Über die Differenzen von drei aufeinanderfolgenden Primzahlen* (Erscheint in der Math. Zeitschrift).

⁴) Vgl. [1], 151 für s = 2; der Beweis für beliebiges s verläuft genau so.

⁵) Vgl. [1], V. (4. 4).

⁶) Vgl. [2] und [3].

⁷) Mein Dank gilt der National Science Foundation für finanzielle Unterstützung (Grant G-16305).