Über die Summe beliebiger und die Differenz aufeinanderfolgender Primzahlen

Autor(en): **Rieger, G.J.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **18 (1963)**

Heft 5

PDF erstellt am: **08.08.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-22645

bisherigen Ergebnisse können wir auch die Lösung dieser abgeänderten Aufgabe angeben. Haben nämlich die 3 rationalen Nullstellen von $f(x)$ und die 2 rationalen Nullstellen von $f'(x)$ den Hauptnenner n, so setzen wir $x = \tilde{x}/n$ und erhalten $f(x) = f(\tilde{x}/n) = \tilde{f}(\tilde{x})$. Die Funktionen $\tilde{f}(\tilde{x})$ und $\tilde{f}'(\tilde{x})$ besitzen dann lauter ganzzahlige Nullstellen. Für die Nullstellen von $\tilde{f}(\tilde{x})$ gelten damit die in (5) gegebenen Darstellungen. Wegen $x = \tilde{x}/n$ erhält man die Nullstellen von $f(x)$ aus denen von $\tilde{f}(\tilde{x})$ durch Division mit der natürlichen Zahl n.

KARL ZUSER, Ingolstadt

Über die Summe beliebiger und die Differenz aufeinanderfolgender Primzahlen

Wir bezeichnen mit kleinen lateinischen Buchstaben natürliche Zahlen, mit p eine Primzahl, mit $:=$ Gleichheit nach Definition, mit $\wedge$ das «und» der Logik, mit $A\,\{* : \ldots\}$ die Anzahl der $*$ mit den Eigenschaften ... und mit C eine absolute positive Konstante.

Wir gehen aus von zwei geläufigen Ergebnissen der elementaren additiven Primzahltheorie. SCHNIRELMANN[1]) hat bewiesen, dass die Folge der Zahlen der Gestalt $p_1 + p_2$ ($p_{1,2}$ prim) positive asymptotische Dichte hat; PRACHAR[2]) hat gezeigt, dass die Folge der Zahlen der Gestalt $p^+ - p$, wenn p^+ die der Primzahl p folgende Primzahl bezeichnet, positive asymptotische Dichte hat. Wir nehmen beide Fragestellungen zusammen und beweisen einen verwandten Satz für Zahlenpaare in der Ebene:

Satz 1. *Es gibt positive Konstanten C_1, C_2, C_3 derart, dass aus $x > C_1$ folgt*

$$A\,\{m, n : m < x \wedge n < C_2 \log x \wedge m = p_1 + p_2 \wedge n = p_2^+ - p_2 \wedge p_{1,2}\,\mathrm{prim}\} > C_3\, x \log x . \tag{1}$$

Beweis. Mit

$$f(m, n) := A\,\{p_1, p_2 : p_1 + p_2 = m \wedge p_2^+ - p_2 = n\}$$

kann man für (1) auch

$$B(x) := A\,\{m, n : m < x \wedge n < C_2 \log x \wedge f(m, n) > 0\} > C_3\, x \log x \tag{2}$$

schreiben. Nach der Schwarzschen Ungleichung ist

$$\Bigl(\sum_{m<x}\ \sum_{n<C_2\log x} f(m, n)\Bigr)^2 \le B(x) \sum_{m<x}\ \sum_{n<C_2\log x} f^2(m, n) . \tag{3}$$

Es ist

$$f(m, n) \le A\,\{p : p < m \wedge (p \wedge m - p \wedge n + p\ \mathrm{prim})\}$$

$$< C_4 \frac{x}{\log^3 x} \prod_{p \mid m n (m+n)} \Bigl(1 + \frac{1}{p}\Bigr)^2 \qquad (m < x,\ x > 2)$$

nach der Brunschen Siebmethode[3]). Mit

$$P_m := \prod_{p \mid m} \Bigl(1 + \frac{1}{p}\Bigr)^4 \tag{4}$$

[1]) Vgl. etwa [1], 150–153.
[2]) Vgl. etwa [1], 154–155.
[3]) Vgl. [1], II. Satz 4.2 und I. (5.23).

folgt

$$\sum_{m<x} \sum_{n<C_2 \log x} f^2(m, n) < C_4^2 \frac{x^2}{\log^6 x} \sum_{m<x} \sum_{n<C_2 \log x} P_m P_n P_{m+n} . \tag{5}$$

Nach der Schwarzschen Ungleichung ist

$$\left.\begin{aligned} \sum_{m<u} \sum_{n<v} P_m P_n P_{m+n} &\leq \sum_{n<v} P_n \Big(\sum_{m<u} P_m^2\Big)^{1/2} \Big(\sum_{m<u} P_{m+n}^2\Big)^{1/2} \\ &\leq \sum_{n<v} P_n \sum_{j<u+v} P_j^2 < C_5\, v\, (u+v) \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

wegen (4) und

$$\sum_{j<w} \prod_{p \mid j} \left(1 + \frac{1}{p}\right)^s < C(s)\, w$$

mit einer nur von s abhängigen positiven Konstanten $C(s)$[4]. Aus (5) und (6) folgt

$$\sum_{m<x} \sum_{n<C_2 \log x} f^2(m, n) < C_6 \frac{x^3}{\log^5 x} \qquad (x > 2) . \tag{7}$$

Ferner ist

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{m<x} \sum_{n<C_2 \log x} f(m, n) = A\,\{p_1, p_2 : p_1 + p_2 < x \wedge p_2^+ - p_2 < C_2 \log x\} \\ &\geq A\left\{p_1 : p_1 < \frac{x}{2}\right\} A\left\{p_2 : p_2 < \frac{x}{2} \wedge p_2^+ - p_2 < C_2 \log x\right\} \\ &\qquad > C_8 \left(\frac{x}{\log x}\right)^2 \qquad (x > C_7) \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

wegen der Čebyshevschen Formel

$$A\,\{p : p < y\} > C_9 \frac{y}{\log y} \qquad (y > 2)$$

und wegen

$$A\,\{p : p < y \wedge p^+ - p < C_2 \log y\} > C_{11} \frac{y}{\log y} \qquad (y > C_{10})$$

bei geeignetem $C_2 > 0$[5]. Aus (3), (7) und (8) folgt (2) und damit die Behauptung.

Man gelangt zu einigen interessanten Verallgemeinerungen von Satz 1, wenn man zum obigen Beweis frühere Überlegungen[6] hinzunimmt. G. J. RIEGER, München[7]

LITERATURVERZEICHNIS

[1] KARL PRACHAR, *Primzahlverteilung* (Springer-Verlag, Berlin/Göttingen/Heidelberg 1957).

[2] G. J. RIEGER, *Über ein lineares Gleichungssystem von Prachar mit Primzahlen* (Erscheint im Journal für die reine und angewandte Mathematik).

[3] G. J. RIEGER, *Über die Differenzen von drei aufeinanderfolgenden Primzahlen* (Erscheint in der Math. Zeitschrift).

[4] Vgl. [1], 151 für $s = 2$; der Beweis für beliebiges s verläuft genau so.

[5] Vgl. [1], V. (4. 4).

[6] Vgl. [2] und [3].

[7] Mein Dank gilt der National Science Foundation für finanzielle Unterstützung (Grant G-16305).