Kleine Mitteilungen

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **18 (1963)**

Heft 6

Ungelöste Probleme

Nachtrag zu Nr. 46 (El. Math. *18*, S. 85). Die Stufe s eines (nicht formalreellen) Körpers K war definiert als die kleinste Zahl, so dass -1 Summe von s Quadraten aus K ist. Die Herren J. W. S. CASSELS (Cambridge) und A. PFISTER (München) haben gezeigt, dass s stets eine Potenz von 2 sein muss, und dass andererseits jede Zweierpotenz wirklich Stufe eines Körpers ist. Die (bisher unveröffentlichten) Beweise verwenden nur Grundkenntnisse der Algebra. Der entscheidende Hilfssatz von J. W. S. CASSELS lautet: Ist das Polynom $f(x) \in K[x]$ Summe von n Quadraten aus dem Körper $K(x)$, so ist $f(x)$ auch Summe von n Quadraten aus dem Polynomring $K[x]$.

H. LENZ

Kleine Mitteilungen

Notiz über Primzahlreihen

Primzahlen (PZ) p sind in der Form $\varkappa p = a^2 + D b^2$ darstellbar, worin $\varkappa$ eine kleine Zahl $(1, 2, 4 \ldots)$ sein kann, a, b, D ganze positive Zahlen bedeuten. Zu jeder Kombination $\varkappa$, D gehört eine mehr oder weniger ausgedehnte Reihe von PZ (mit verschiedenen a und b). Für $\varkappa = 1$, $D = 1$ enthält die Reihe zum Beispiel im Bereich bis 100000 rund die Hälfte aller 9592 PZ (man beachte, dass diese PZ der arithmetischen Reihe $4\lambda + 1$ angehören und es rund ebenso viele PZ in der arithmetischen Reihe $4\lambda + 3$ geben muss, λ eine ganze positive Zahl). Auch $D = 2, 3, 7$ liefern mit $\varkappa = 1$ Reihen, die je rund die Hälfte der PZ enthalten. Man kann das für $D = 1, 2, 3$ im Bereich bis 100000, für $D = 7$ im Bereich bis 10000 an Hand der Tabelle von CUNNINGHAM (1904) durch Abzählen kontrollieren, die alle PZ bis 100000 mit ihrer Zerlegungsmöglichkeit unter Verwendung von $D = 1, 2, 3$ resp. bis 10000 mit $D = 7$ und $\varkappa = 1$ enthält. Solche ausgedehnte Reihen (rund $^1/_2$ aller PZ) erhält man nur noch mit $D = 11, 19, 43, 67, 163$, wenn man ausserdem $\varkappa = 4$ setzt.

Vor einiger Zeit wurden in Roy. Soc. Math. Tables V (herausgegeben von J. C. P. MILLER, Cambridge 1960) 8 weitere Reihen von PZ im Bereich bis 100000 veröffentlicht, die zu den Werten $D = 5, 6, 10, 13$ mit $\varkappa = 1$ und $\varkappa = 2$ gehören. Jede dieser Reihen enthält rund $^1/_4$ aller PZ, je zwei mit demselben D-Wert ($\varkappa = 1$ und 2) verschiedene, zusammen also rund $^1/_2$ aller PZ.

Es erheben sich nun folgende Fragen:

1. Werden durch die 3 Reihen von CUNNINGHAM ($D = 1, 2, 3$) alle PZ bis 100000 erfasst, oder wieviele und dann welche nicht?

Antwort: 1195 werden nicht erfasst, von ihnen gehören $1195 - 601 = 594$ in die Reihe $D = 7$.

2. Werden durch die 8 Reihen der Roy. Soc. alle PZ bis 100000 erfasst, oder wieviele und dann welche nicht?

Antwort: 617 werden nicht erfasst, von ihnen gehören 318 zur Reihe $D = 1$, zwei (nämlich $52963 = 49^2 + 2 \cdot 159^2$ und $81371 = 267^2 + 2 \cdot 71^2$) zur Reihe $D = 2$. Die restlichen 297 PZ enden sämtlich bemerkenswerter Weise auf 1 oder 9 mit ungerader vorletzter Ziffer und gehören den Reihen an: $120\lambda + 71$ oder $+ 119$, wenn λ eine ganze positive Zahl ist, also nicht den Reihen mit $D = 1, 2$ oder 3.

3. Sind die unter (1) genannten 601 PZ in den PZ enthalten, die zu $\varkappa = 4$ und $D = 11, 19, 43, 67$ oder 163 gehören, oder wieviele und dann welche nicht?

Antwort: Einige wenige (19) sind nicht darin enthalten.

Die unter (2) genannten 297 PZ mit ihrer Zerlegung sind von mir in einer Tabelle zusammengefasst, die mit Erläuterungen in der Bibliothek der Bergakademie Clausthal hinterlegt ist. Diese Tabelle stellt offenbar eine Ergänzung der Tabellen von CUNNINGHAM und Roy. Soc. dar; denn zusammen gestatten sie nun, die Zerlegung jeder PZ bis 100000 unmittelbar abzulesen. – Die unter (1) und (3) genannten PZ sind von mir mit Zerlegung in einer zweiten Tabelle mitgeteilt, die sich ebenfalls am angegebenen Orte befindet. (Je ein weiteres Exemplar wird der Bibliothek der TH Hannover und der Roy. Soc. Cambridge übersandt).

Zum Schluss sei noch auf folgende Möglichkeit der Zusammenfassung von PZ in Reihen hingewiesen:

Jede PZ > 71, die auf 1 oder 9 endet, lässt die Darstellung $p = a^2 + D \cdot 5^2$ zu; für jede PZ > 47, die auf 3 oder 7 endet, gilt $z \cdot p = a^2 + D \cdot 5^2$.

S. VALENTINER, Bad Oeynhausen/Deutschland

Eine Bemerkung zur Definition der Intervallschachtelung

Es ist üblich[1]), eine Intervallschachtelung durch zwei Folgen $(a_n)_{n=1,2,\ldots}$ und $(b_n)_{n=1,2,\ldots}$ rationaler Zahlen zu definieren, welche die Bedingungen erfüllen:

(1) Für alle natürlichen Zahlen n gilt $a_n \leqq a_{n+1}$.

(2) Für alle natürlichen Zahlen n gilt $b_n \geqq b_{n+1}$.

(3) Für alle natürlichen Zahlen n gilt $a_n \leqq b_n$.

(4) Zu jeder positiven rationalen Zahl ε existiert eine natürliche Zahl n_0, so dass für alle natürlichen Zahlen $n > n_0$ gilt

$$| b_n - a_n | < \varepsilon .$$

Es genügt jedoch, weniger zu fordern, denn die Bedingung (3) lässt sich bereits aus den Bedingungen (1), (2) und (4) zusammen folgern.

Nehmen wir nämlich an, für zwei Folgen $(a_n)_{n=1,2,\ldots}$ und $(b_n)_{n=1,2,\ldots}$ rationaler Zahlen seien die Bedingungen (1), (2), (4), nicht aber (3) erfüllt, dann muss es eine natürliche Zahl m_0 geben, für die gilt

$$a_{m_0} > b_{m_0} .$$

Wegen (1) und (2) gilt daher für alle natürlichen Zahlen $m > m_0$

$$a_m \geqq a_{m_0} > b_{m_0} \geqq b_m .$$

Wählt man nun

$$\varepsilon = \frac{a_{m_0} - b_{m_0}}{2} > 0 ,$$

so folgt

$$a_m - b_m \geqq a_{m_0} - b_{m_0} > \varepsilon$$

für alle $m > m_0$. Das steht aber im Widerspruch zu (4).

Für die Definition der Intervallschachtelung braucht man demnach nur die Bedingungen (1), (2) und (4). Diese sind voneinander unabhängig.

Wählt man nämlich $a_n = (-1)^n\, 1/n$, $b_n = 1/n$ für alle natürlichen Zahlen n, so gelten (2) und (4), nicht aber (1).

Bei $a_n = -1/n$, $b_n = (-1)^n\, 1/n$ für alle natürlichen Zahlen n sind (1) und (4) erfüllt, (2) gilt nicht.

Schliesslich sind mit $a_n = n$ und $b_n = -n$ für alle natürlichen Zahlen n (1) und (2) erfüllt, während (4) verletzt ist.

Will man aber in der Definition nicht auf die Bedingung (3) verzichten, so kann man (4) durch eine schwächere Forderung ersetzen:

(4a) Zu jeder positiven rationalen Zahl ε existiert eine natürliche Zahl n_0, so dass gilt

$$| b_{n_0} - a_{n_0} | < \varepsilon .$$

Das System der Forderungen (1), (2), (3) und (4a) ist vollständig.

Ist nämlich für zwei Folgen $(a_n)_{n=1,2,\ldots}$, $(b_n)_{n=1,2,\ldots}$ rationaler Zahlen dieses System erfüllt, so gilt für alle natürlichen Zahlen $n > n_0$

$$0 \leqq b_n - a_n \leqq b_{n_0} - a_{n_0} < \varepsilon .$$

Also gilt (4).

Die Forderungen (1), (2), (3) und (4a) sind auch unabhängig voneinander.

Wählt man $a_n = (-1)^n\, 1/n$, $b_n = 1/n$ für alle natürlichen Zahlen n, so sind (2), (3) und (4a), nicht aber (1) erfüllt.

[1]) J. NAAS, H. L. SCHMID, *Mathematisches Wörterbuch*, I, 2. Aufl. (1962), S. 832.

Mit $a_n = -1/n$, $b_n = (-1)^n 1/n$ für alle natürlichen Zahlen n sind (1), (3) und (4a) erfüllt, (2) gilt nicht.

Setzt man $a_n = 1/2 - 1/n$, $b_n = 1/n - 1/2$ für alle natürlichen Zahlen n, so gelten (1), (2), (4a). (3) gilt nicht.

Schliesslich sind mit $a_n = -1/n$ und $b_n = 1$ für alle natürlichen Zahlen n (1), (2), (3) erfüllt, (4a) ist verletzt.

HANS-JOACHIM VOLLRATH, Darmstadt

Über einige Berührungs- und Orthogonalkreise am Dreikreis

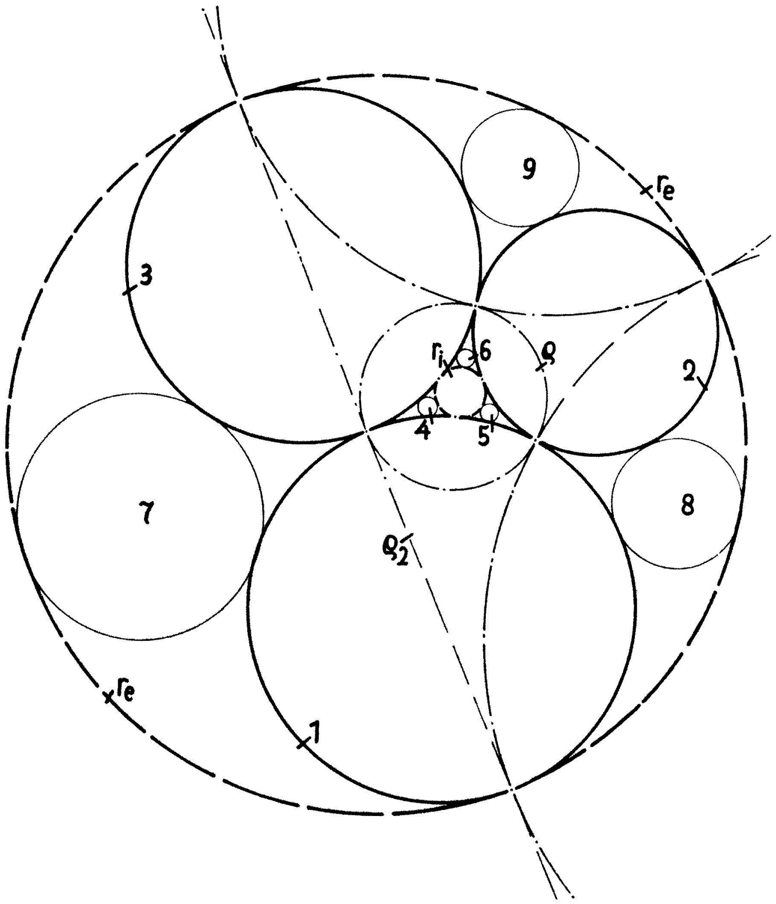
In seinem schönen Beitrag «Zum Apollonischen Berührungsproblem» in «Praxis der Mathematik», 3. Jg. hat Prof. LUDWIG BIEBERBACH auf Seite 147 (Formel 19) seine allgemeinen Resultate auf den Dreikreis angewandt, unter dem ein Tripel von Kreisen verstanden sei, die sich paarweise berühren. Durch Reduzierung und Umkehrung ergab sich daraus die Formel 20

$$\frac{1}{r_{(e,i)}} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} \mp \frac{2}{\varrho},$$

in der der Orthogonalkreisradius ϱ der Inkreisradius des Dreiecks der zu den Radien r_1, r_2, r_3 gehörenden *Kreismittelpunkte* (!) ist. Er wird aus r_1, r_2, r_3 bequem durch die Heronische Formel dargestellt:

$$\varrho = \sqrt{\frac{r_1 \cdot r_2 \cdot r_3}{r_1 + r_2 + r_3}}$$

Sämtliche weiteren Berührungs- und Orthogonalkreise ad infinitum, wie sie die Zeichnung andeutet, können dann aus den nun insgesamt sechs gegebenen Kreisen durch einfache algebraische Operationen gewonnen werden.



So kann man zum Beispiel aus den r_1, r_3, r_e ein neues Tripel zusammenstellen, zu dem dann das gegebene r_2 als Ankreis gehört. Daraus ergibt sich neu der Orthogonalkreis ϱ_2 und mit ihm wiederum der Inkreis r_7 des gewählten Tripels.

Eine Fülle interessanter Beziehungen breitet sich so aus innerhalb der Berührungskreise, der Orthogonalkreise (die wieder unter sich Berührungskreise sind), zwischen den beiden Gruppen usw. Zur Veranschaulichung diene folgende Formel:

$$\frac{1}{r_4} + \frac{1}{r_5} + \dots + \frac{1}{r_9} = 18\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}\right).$$

WALTER K. B. HOLZ, Hagen (Deutschland)

Punkte mit ganzzahligen Abständen

Folgendes Verfahren erlaubt, auf einer Geraden eine beliebige (endliche) Anzahl von Punkten zu bestimmen, die unter sich und von einem passend gewählten, ausserhalb der Geraden liegenden Punkte *ganzzahlige* Abstände haben[1]).

Im Dreieck ABP seien die Masszahlen der Seiten $AB = p$, $AP = a$ und $BP = b$ rationale Zahlen. Die Zahl $r > b$ sei ebenfalls rational, sonst aber beliebig. Ist nun C derjenige Punkt der Geraden AB, für welchen gilt $BC = x$ und $CP = c = r - x$, so ist auch x und damit c rational; denn der Cosinussatz, ein erstes Mal für den Winkel BAP und die Gegenseite b, ein zweites Mal für denselben Winkel und die Gegenseite $c = r - x$ hingeschrieben, liefert eine in x *lineare* Gleichung mit rationalen Koeffizienten. Hat man auf der Geraden AB den Punkt C und durch dasselbe Verfahren endlich viele weitere Punkte $D, E, \dots$ bestimmt, so kann man durch passende Vergrösserung der Figur $PABCDE\dots$ stets erreichen, dass die Masszahlen aller Strecken, die die neuen Punkte P^*, A^*, B^*, $C^*, \dots$ verbinden, ganzzahlig werden.

Beispiel: $AB = 2$, $AP = 4$, $BP = 3$, $r = 6$ führt auf $x = 18/7$ und $A^*B^* = 14$, $A^*P^* = 28$, $B^*P^* = 21$, $B^*C^* = 18$, $A^*C^* = 32$, $C^*P^* = 24$. F. STEIGER, Bern

Aufgaben

Aufgabe 440. Der Schleife der Strophoide

$$(x^2 + y^2)\, x = x^2 - y^2$$

ist eine Folge von sich der Reihe nach berührenden Kreisen K_1, K_2, K_3, ... einbeschrieben. K_1 ist Scheitelkrümmungskreis, während jeder andere die Kurve doppelt berührt. Diese Kreise schneiden die x-Achse in den Punkten mit den Abszissen a_1 $(= 1)$, a_2, a_3, ... Man zeige, dass die a_i Stammbrüche sind und dass $(3 - (-1)^n)/4\, a_n$ für jedes n das Quadrat einer natürlichen Zahl ist. C. BINDSCHEDLER, Küsnacht

Lösung: Die Strophoide H geht durch Spiegelung am Einheitskreis um den Ursprung in die gleichseitige Hyperbel $H' \equiv x^2 - y^2 - x = 0$ über. Der Kreis

$$K \equiv x^2 + y^2 - (s + t)\, x + s\, t = 0\,,$$

der die x-Achse in Gegenpunkten mit den Abszissen s und t trifft, werde mit H' zum Schnitt gebracht. Für die Abszissen der Schnittpunkte der beiden Kurven erhält man so die Gleichung

$$2\, x^2 - (s + t + 1)\, x + s\, t = 0\,,$$

deren Diskriminante $(s + t + 1)^2 - 8\, s\, t$ verschwindet, wenn K die Hyperbel H' berührt. Dies ergibt (bei festgehaltenem s)

$$t^2 - (6\, s - 2)\, t + (s + 1)^2 = 0. \tag{1}$$

[1]) Vergleiche die Mitteilungen von E. TROST, M. ALTWEGG, A. MÜLLER, F. STEIGER in *El. Math.* 6, Nr. 3, 59 (1951); 7, Nr. 3, 56 (1952); 8, Nr. 2, 37 (1953); 8, Nr. 3, 66 (1953) Text verstümmelt.