Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 18 (1963)
Heft: 6

Rubrik: Aufgaben

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 03.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Eine Fülle interessanter Beziehungen breitet sich so aus innerhalb der Berührungskreise, der Orthogonalkreise (die wieder unter sich Berührungskreise sind), zwischen den beiden Gruppen usw. Zur Veranschaulichung diene folgende Formel:

$$\frac{1}{r_4} + \frac{1}{r_5} + \ldots + \frac{1}{r_9} = 18\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}\right).$$

WALTER K. B. HOLZ, Hagen (Deutschland)

Punkte mit ganzzahligen Abständen

Folgendes Verfahren erlaubt, auf einer Geraden eine beliebige (endliche) Anzahl von Punkten zu bestimmen, die unter sich und von einem passend gewählten, ausserhalb der Geraden liegenden Punkte *ganzzahlige* Abstände haben[1]).

Im Dreieck ABP seien die Masszahlen der Seiten $AB = p$, $AP = a$ und $BP = b$ rationale Zahlen. Die Zahl $r > b$ sei ebenfalls rational, sonst aber beliebig. Ist nun C derjenige Punkt der Geraden AB, für welchen gilt $BC = x$ und $CP = c = r - x$, so ist auch x und damit c rational; denn der Cosinussatz, ein erstes Mal für den Winkel BAP und die Gegenseite b, ein zweites Mal für denselben Winkel und die Gegenseite $c = r - x$ hingeschrieben, liefert eine in x *lineare* Gleichung mit rationalen Koeffizienten. Hat man auf der Geraden AB den Punkt C und durch dasselbe Verfahren endlich viele weitere Punkte $D, E, \ldots$ bestimmt, so kann man durch passende Vergrösserung der Figur $PABCDE\ldots$ stets erreichen, dass die Masszahlen aller Strecken, die die neuen Punkte P^*, A^*, B^*, $C^*, \ldots$ verbinden, ganzzahlig werden.

Beispiel: $AB = 2$, $AP = 4$, $BP = 3$, $r = 6$ führt auf $x = 18/7$ und $A^*B^* = 14$, $A^*P^* = 28$, $B^*P^* = 21$, $B^*C^* = 18$, $A^*C^* = 32$, $C^*P^* = 24$. F. STEIGER, Bern

Aufgaben

Aufgabe 440. Der Schleife der Strophoide

$$(x^2 + y^2)\, x = x^2 - y^2$$

ist eine Folge von sich der Reihe nach berührenden Kreisen $K_1, K_2, K_3, \ldots$ einbeschrieben. K_1 ist Scheitelkrümmungskreis, während jeder andere die Kurve doppelt berührt. Diese Kreise schneiden die x-Achse in den Punkten mit den Abszissen a_1 $(= 1)$, $a_2, a_3, \ldots$. Man zeige, dass die a_i Stammbrüche sind und dass $(3 - (-1)^n)/4\, a_n$ für jedes n das Quadrat einer natürlichen Zahl ist. C. BINDSCHEDLER, Küsnacht

Lösung: Die Strophoide H geht durch Spiegelung am Einheitskreis um den Ursprung in die gleichseitige Hyperbel $H' \equiv x^2 - y^2 - x = 0$ über. Der Kreis

$$K \equiv x^2 + y^2 - (s + t)\, x + s\, t = 0\,,$$

der die x-Achse in Gegenpunkten mit den Abszissen s und t trifft, werde mit H' zum Schnitt gebracht. Für die Abszissen der Schnittpunkte der beiden Kurven erhält man so die Gleichung

$$2\, x^2 - (s + t + 1)\, x + s\, t = 0\,,$$

deren Diskriminante $(s + t + 1)^2 - 8\, s\, t$ verschwindet, wenn K die Hyperbel H' berührt. Dies ergibt (bei festgehaltenem s)

$$t^2 - (6\, s - 2)\, t + (s + 1)^2 = 0. \qquad (1)$$

[1]) Vergleiche die Mitteilungen von E. TROST, M. ALTWEGG, A. MÜLLER, F. STEIGER in *El. Math.* 6, Nr. 3, 59 (1951); 7, Nr. 3, 56 (1952); 8, Nr. 2, 37 (1953); 8, Nr. 3, 66 (1953) Text verstümmelt.

Bezeichnet man mit a'_i die Abszissen der auf der x-Achse liegenden Punkte der zu den Kreisen K_i inversen Kreise, setzt man ferner in der Gleichung (1) $s = a'_{n+1}$ und ihre Wurzeln $t_1 = a'_n$, $t_2 = a'_{n+2}$, so lassen sich mit dem Satz von VIETA die Rekursionsformeln

$$a'_n + a'_{n+2} = 6\, a'_{n+1} - 2 \tag{2}$$

und

$$a'_n\, a'_{n+2} = (a'_{n+1} + 1)^2 \tag{3}$$

aufstellen. Da $a'_1 = 1$ und $a'_2 = 2$, zeigt (2), dass alle a'_i $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ ganzzahlig werden. Aus (3) folgt ferner, dass a'_n, je nachdem, ob n ungerade oder gerade ist, eine Quadratzahl oder das Doppelte einer Quadratzahl ist. Aus $a_i = 1/a'_i$ ergibt sich unmittelbar die Richtigkeit der in der Aufgabe aufgestellten Behauptungen. K. GRÜN, Linz/Donau

Eine ähnliche Lösung sandte W. SCHÖNE (Leipzig).

Aufgabe 441. Man bestimme $\sin\vartheta \neq 1$ in den Vektoren

$$\mathfrak{a} = (0, 0, 1),\ \mathfrak{b}_k = \left(\cos\vartheta \cos 2\pi \frac{k}{5},\ \cos\vartheta \sin 2\pi \frac{k}{5},\ \sin\vartheta\right)\ (k = 0, 1, \ldots, 4)$$

so, dass $\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}_0 = \mathfrak{b}_0\,\mathfrak{b}_1$ wird. Man zeige, dass unter den Skalarprodukten der 12 Vektoren $\pm\,\mathfrak{a}$, $\pm\,\mathfrak{b}_k$ dann nur die Werte $\pm\,1$, $\pm\,\mathfrak{a}_0\,\mathfrak{b}_1$ vorkommen. Daraus leite man die Existenz von je 60 geraden und ungeraden Bewegungen her, die diese 12 Vektoren untereinander vertauschen, also die Existenz des regulären Ikosaeders und seiner Gruppe.

H. LENZ, München

Lösung des Aufgabenstellers: Aus der gestellten Forderung ergibt sich

$$\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}_0 = \sin\vartheta = \mathfrak{b}_0\,\mathfrak{b}_1 = \cos^2\vartheta \cos 72^\circ + \sin^2\vartheta\,.$$

Das ist eine quadratische Gleichung für $\sin\vartheta$ mit der Wurzel 1. Die zweite Wurzel ergibt sich daraus zu

$$\sin\vartheta = \frac{\cos 72^\circ}{1 - \cos 72^\circ}\,.$$

Weil $4\cos 72^\circ = \sqrt{5} - 1$ ist, folgt $\sin\vartheta = 1/\sqrt{5}$, $\cos\vartheta = 2/\sqrt{5}$. Ferner wird

$$\mathfrak{b}_0\,\mathfrak{b}_2 = \cos^2\vartheta \cos 144^\circ + \sin^2\vartheta = \frac{4}{5}(2\cos^2 72^\circ - 1) + \frac{1}{5}\,.$$

Für das Teilverhältnis $\gamma = 2\cos 72^\circ$ des goldenen Schnittes gilt $\gamma^2 = 1 - \gamma$, also wird

$$\mathfrak{b}_0\,\mathfrak{b}_2 = \frac{2}{5}(1 - \gamma) - \frac{3}{5} = -\frac{1}{\sqrt{5}}\,.$$

Damit ist die erste Behauptung bewiesen. Insbesondere ist

$$\mathfrak{b}_i\,\mathfrak{b}_k = \begin{cases} -\sin\vartheta, \text{ falls } i - k \equiv \pm\,2 \pmod 5\,, \\ \sin\vartheta, \text{ falls } i - k \equiv \pm\,1 \pmod 5\,, \end{cases}$$

$$\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}_k = \sin\vartheta \text{ für alle } k.$$

Bei der Vertauschung α:

$$\pm\,\mathfrak{a} \leftrightarrow \pm\,\mathfrak{b}_0\,,\quad \pm\,\mathfrak{b}_2 \leftrightarrow \mp\,\mathfrak{b}_3\,,\quad \pm\,\mathfrak{b}_1 \leftrightarrow \pm\,\mathfrak{b}_1\,,\quad \pm\,\mathfrak{b}_4 \leftrightarrow \pm\,\mathfrak{b}_4$$

bleiben daher die Werte aller Skalarprodukte unserer 12 Vektoren erhalten; nach dem allgemeinen Kongruenzsatz lässt sich α also zu einer Bewegung fortsetzen. Diese Überlegung gilt ebenso mit irgendeiner zyklischen Vertauschung der Indices 0, 1, 2, 3, 4. Daher lässt sich $\mathfrak{a}$ durch eine die 12 Vektoren vertauschende Bewegung in jeden der Vektoren $\mathfrak{b}_k$ überführen. Weil es offenbar 20 gerade und ungerade Bewegungen dieser Art gibt, die die Gerade durch $\mathfrak{a}$ und $-\,\mathfrak{a}$ fest lassen, ist damit alles bewiesen.

Aufgabe 442. Es sei p eine Primzahl der Form $8\,k + 7$. Von den quadratischen Resten mod p werden die absolut kleinsten Reste mod p gebildet. Man beweise, dass ihre Summe Null ergibt. J. SURÁNYI, Budapest

Solution: Let $p = 2m + 1 \equiv 7 \pmod 8$. Then

$$\sum_{r=1}^{p-1} r\left(\frac{r}{p}\right) = \sum_{r=1}^{m} r\left(\frac{r}{p}\right) + \sum_{r=1}^{m} (p-r)\left(\frac{p-r}{p}\right) = 2\sum_{r=1}^{m} r\left(\frac{r}{p}\right) - p\sum_{r=1}^{m}\left(\frac{r}{p}\right);$$

on the other hand

$$\sum_{r=1}^{p-1} r\left(\frac{r}{p}\right) = \sum_{r=1}^{m} 2r\left(\frac{2r}{p}\right) + \sum_{r=1}^{m} (p-2r)\left(\frac{p-2r}{p}\right) = 4\sum_{r=1}^{m} r\left(\frac{r}{p}\right) - p\sum_{r=1}^{m}\left(\frac{r}{p}\right).$$

It follows that

$$\sum_{r=1}^{m} r\left(\frac{r}{p}\right) = 0 \quad [p \equiv 7 \pmod 8].$$

But

$$S = \sum_{\substack{(a/p)=1 \\ -m \leqslant a \leqslant m}} a = \sum_{\substack{(a/p)=1 \\ 0 < a \leqslant m}} a - \sum_{\substack{(b/p)=-1 \\ 0 < b \leqslant m}} b = \sum_{r=1}^{m} r\left(\frac{r}{p}\right),$$

so that $S = 0$.

L. Carlitz, Duke University, Durham N.C., U.S.A.

Zweite Lösung: Wir bezeichnen die absolut kleinsten quadratischen Reste mod p mit r_n $(1 \leqq n \leqq (p-1)/2)$, zerlegen das Intervall $(-p/2, p/2)$ in die Teilintervalle $I_k = ((k-3)\,p/4, (k-2)\,p/4)$, $(1 \leqq k \leqq 4)$ und verstehen unter R_k die Anzahl der quadratischen Reste in I_k.

Da 2 quadratischer Rest mod p ist, ist mit r_n auch $2\,r_n$ quadratischer Rest. Wir untersuchen die Verteilung der quadratischen Reste $2\,r_n$ auf die Teilintervalle:

$$\left.\begin{array}{lll} r_n \in I_1\colon & 2\,r_n = r_m - p; & r_m \text{ ungerade}, \in I_3 \text{ oder } I_4 \\ r_n \in I_2\colon & 2\,r_n = r_m; & r_m \text{ gerade}, \in I_1 \text{ oder } I_2 \\ r_n \in I_3\colon & 2\,r_n = r_m; & r_m \text{ gerade}, \in I_3 \text{ oder } I_4 \\ r_n \in I_4\colon & 2\,r_n = r_m + p; & r_m \text{ ungerade}, \in I_1 \text{ oder } I_2 \end{array}\right\} \qquad (*)$$

Durchläuft r_n alle quadratischen Reste, so tut das auch $r_m \equiv 2\,r_n$. Für $r_n \in I_1$ oder I_3 erhält man also genau die sämtlichen quadratischen Reste $\in I_3$ oder I_4. Also ist $R_1 + R_3 = R_3 + R_4$, folglich $R_1 = R_4$. Beim Addieren heben sich also die p in der ersten und letzten Zeile von (*) auf, und wir erhalten $\Sigma\, 2\,r_n = \Sigma\, r_m$, das heisst $\Sigma\, r_n = 0$, w.z.b.w.

Der Satz ist natürlich auch für $p = 8\,k + 1$ und $p = 8\,k + 5$ richtig, aber in diesen Fällen trivial. Die Verteilung der quadratischen Reste auf Teilintervalle wird auch behandelt in P. Bachmann, Zahlentheorie Bd. I, 6. Kapitel, Nr. 30.

E. Teuffel, Korntal/Stuttgart

Eine weitere Lösung sandte W. Jänichen (Berlin-Zehlendorf).

Aufgabe 443. Unter einem Fermattripel verstehen wir drei der Grösse nach geordnete teilerfremde natürliche Zahlen x, y, z, die einer der Gleichungen $x^n + y^n = z^n$ $(n = 2, 3, \ldots)$ genügen. Man zeige, dass genau ein Fermattripel eine arithmetische Folge erster Ordnung bildet.

E. Trost, Zürich

Solution: We may suppose that

$$(a-b)^n + a^n = (a+b)^n,$$

where $(a, b) = 1$. Then

$$(a+b)^n - (a-b)^n = a^n.$$

The left side is divisible by $2\,b$. Since $(a, b) = 1$ it follows that $b = 1$ and $2|a$. Then

$$(a+1)^n - (a-1)^n = a^n,$$

$$2\left\{n\,a^{n-1} + \binom{n}{3} a^{n-3} + \cdots\right\} = a^n. \qquad (*)$$

If n is odd the last term in the braces is 1 so that $a = 2$; but $1^n + 2^n = 3^n$, which implies $n = 1$. If n is even the last two terms are

$$\binom{n}{3} a^3 + n\,a\,.$$

Then if $n > 2$ it is clear that $a^3 \mid 2\,n\,a$, so that $a^2 \mid 2\,n$, $a \mid n$; it follows that the left side of (*) is greater than the right side. Therefore $n = 2$ and (*) becomes $4\,a = a^2$, $a = 4$ and we get $3^2 + 4^2 = 5^2$. L. CARLITZ, Duke University Durham, N.C., U.S.A.

W. SIERPIŃSKI (Warschau) weist in seiner Lösung auf eine Arbeit von A. ROTKIEWICZ [Mathesis *69*, 135–140 (1960)] hin, in der die Unmöglichkeit der Lösung der Diophantischen Gleichung $(a-1)^{2n} + a^{2n} = (a+1)^{2n}$ $(n > 1)$ benutzt wird. Weitere Lösungen sandten C. BINDSCHEDLER (Küsnacht), J. GAEBELEIN (Helmstedt), W. JÄNICHEN (Berlin-Zehlendorf), H. MEILI (Winterthur), MOK-KONG SHEN (München), E. TEUFFEL (Korntal/Stuttgart), H. TRIEBEL (Jena).

Neue Aufgaben

Aufgabe 465. Aus den n^2 Platznummern einer Cayleyschen Multiplikationstafel einer Gruppe der Ordnung n werden m Nummern *zufällig* (etwa durch Ziehen aus einer Urne) ausgewählt und in der Gruppentafel die entsprechenden Elemente entfernt. Den grössten Wert $k(n)$ von m, für den die Tafel aus dem Rest stets eindeutig rekonstruiert werden kann, hat kürzlich J. DÉNES bestimmt (ohne Angabe von Beispielen). Es ist $k(n) = 2\,n - 1$ für $n \neq 4$ und $k(4) = 3$.

a) Man rekonstruiere die Tafel (E = Einselement)

E	A	B	C	D	F	G	H
A	*	*	E	*	G	*	D
B	*	*	A	*	*	*	*
C	*	*	*	*	*	*	*
D	H	G	F	*	*	*	*
F	*	*	G	*	*	*	*
G	*	*	H	E	*	*	*
H	*	*	*	*	E	*	B

b) Man streiche in der rekonstruierten Tafel $2\,n = 16$ Elemente so weg, dass die Tafel nicht mehr eindeutig ergänzt werden kann. E. TROST, Zürich

Aufgabe 466. *Erweiterungen der Aufgabe 443*[1]):

a) Es gibt genau eine viergliedrige arithmetische Folge erster Ordnung, deren Glieder x, y, z, w teilerfremde natürliche Zahlen sind und einer Gleichung

$$x^n + y^n + z^n = w^n$$

mit natürlichem n genügen.

b) Man bestimme alle fünfgliedrigen arithmetischen Folgen erster Ordnung, deren Glieder x, y, z, u, v teilerfremde natürliche Zahlen sind und einer Gleichung

$$x^n + y^n + z^n = u^n + v^n$$

mit natürlichem n genügen. E. TEUFFEL, Korntal/Stuttgart

Aufgabe 467. Bilden in einer Determinante die Elemente von $p + 2$ Zeilen (Spalten) je eine arithmetische Reihe p-ter Ordnung ($p \geqq 1$), so hat die Determinante den Wert Null.

G. GÜTTLER, Frankfurt/M.

Aufgabe 468. Es seien a_i die Längen der Seiten und w_i diejenigen der Winkelhalbierenden eines Dreiecks. Man zeige, dass stets gilt

$$16 \sum_{i=1}^{3} w_i^4 \leqq 9 \sum_{i=1}^{3} a_i^4$$

mit Gleichheit nur im gleichseitigen Dreieck.

J. BERKES, Szeged und A. MĄKOWSKI, Warschau

[1]) Siehe die Lösung dieser Aufgabe in diesem Heft, S. 139.

Aufgaben für die Schule

Es wird kein Anspruch auf Originalität der Aufgaben erhoben; Autoren und Quellen werden im allgemeinen nicht genannt. Die Daten für Aufgaben aus der Darstellenden Geometrie sind durchwegs so festgelegt, dass der Ursprung des Koordinatensystems in der Mitte des linken Randes eines Blattes vom Format A 4 gewählt werden soll, x-Achse nach rechts, y-Achse nach vorn, z-Achse nach oben, Einheit 1 cm. Anregungen und Beiträge sind zu senden an Prof. Dr. WILLI LÜSSY, Büelrainstrasse 51, Winterthur.

1. Aus $a + b + c = 0$ und $S_n = a^n + b^n + c^n$ ergeben sich folgende Identitäten:

$$S_2 = -2\,(ab + bc + ca)$$
$$S_3 = 3\,a\,b\,c$$
$$S_4 = \frac{1}{2}\,S_2^2$$
$$\frac{1}{5}\,S_5 = \frac{1}{3}\,S_3 \cdot \frac{1}{2}\,S_2$$
$$S_6 = \frac{1}{4}\,S_4\,S_2 + \frac{1}{3}\,S_3^2$$
$$7\,S_5\,S_4 = 5\,S_7\,S_2\,.$$

▶ Zur schrittweisen Berechnung der S_n kann man beachten, dass a, b und c die Wurzeln der Gleichung

$$x^3 + (a\,b + b\,c + c\,a)\,x - a\,b\,c = 0$$

sind.

2. Angeregt durch die Aufgabe 1 in Band XVII, Seite 115, teilt Herr F. GÖTZE, Jena, folgende Verallgemeinerung mit:
Man bestimme $2\,n + 1$ aufeinanderfolgende ganze Zahlen so, dass die Summe der Quadrate der ersten $n + 1$ Zahlen gleich der Summe der Quadrate der letzten n Zahlen ist.

▶ Wähle als Unbekannte x die mittlere Zahl! Ausser der trivialen Lösung $x_1 = 0$ findet man $x_2 = 2\,n\,(n + 1)$. Die kleinste Zahl ist $\binom{2\,n + 1}{2}$, und für die Summe ergibt sich

$$\frac{n\,(n + 1)\,(2\,n + 1)\,(12\,n^2 + 12\,n + 1)}{6}\,.$$

3. Für die Fläche eines Vierecks mit den Ecken $A_i\,(x_i;\,y_i)$, $i = 1, 2, 3, 4$, findet man

$$f = \pm\,\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \\ x_4 - x_2 & y_4 - y_2 \end{vmatrix}.$$

▶ Ziehe die Strecken OB und OC gleichlang und parallel den Diagonalen A_1A_3 und A_2A_4. Das Dreieck OBC hat dieselbe Fläche wie das Viereck.

4. Einem beliebigen Viereck sind Parallelogramme so einzubeschreiben, dass auf jeder Vierecksseite eine Ecke liegt. Welches ist der geometrische Ort der Mittelpunkte?

▶ Betrachtet man zunächst statt des Vierecks das vollständige Vierseit, so kann zu jedem beliebig gewählten Mittelpunkt ein Parallelogramm konstruiert werden. Scheidet man jetzt diejenigen Mittelpunkte aus, für die Ecken ausserhalb des Vierecks fallen, so bleibt als gesuchter Ort das Innere und der Rand eines Parallelogramms, von dem zwei Ecken in den Mittelpunkten der Vierecksdiagonalen liegen, und die Seiten zu zwei Vierecksseiten parallel sind.

5. Man bestimme alle Heronschen Zahlentripel. (Ganze Masszahlen der Seiten eines Dreiecks, dessen Fläche ebenfalls ganzzahlig ist.)

▶ Damit die Fläche ganzzahlig wird, müssen die Höhen rational sein, nach dem Cosinussatz auch die Cosinusse der Dreieckswinkel, also schliesslich die Abschnitte, die von den Höhen auf den Gegenseiten bestimmt werden. Demnach gilt: *Ein Heronsches*

Dreieck liegt dann und nur dann vor, wenn es durch eine Höhe in zwei Pythagoreische Dreiecke zerlegt wird. Man findet also Heronsche Dreiecke, indem man zwei Pythagoreische Dreiecke $(x^2 + y^2;\ 2\,x\,y;\ x^2 - y^2)$ und $(u^2 + v^2;\ 2\,u\,v;\ u^2 - v^2)$ mit $x > y$ und $u > v$ so ähnlich vergrössert, dass zwei Katheten, zum Beispiel $2\,x\,y$ und $2\,u\,v$, gleich werden, und sie dann längs dieser Katheten aneinanderlegt. So ergeben sich die Dreiecksseiten

$$a = u\,v\,(x^2 + y^2) \quad b = x\,y\,(u^2 + v^2) \quad c = u\,v\,(x^2 - y^2) + x\,y\,(u^2 - v^2)\,.$$

Nun lässt sich diese Operation des Aneinanderlegens noch auf sieben andere Arten ausführen. Überlegt man aber, dass durch

$$\sin\alpha = \frac{2\,x\,y}{x^2 + y^2}\,, \quad \sin\beta = \frac{2\,u\,v}{u^2 + v^2}$$

jeder für ein Pythagoreisches Dreieck in Frage kommende spitze Winkel bestimmt wird, so findet man, dass die oben gewählte Art schon alle (bis auf Ähnlichkeitstransformationen) möglichen Fälle liefert.

Literaturüberschau

Basic Geometry. Von G. D. Birkhoff und R. Beatley. 294 Seiten mit 316 Figuren und zahlreichen Photographien. $ 3.95 (Chelsea Publishing Company, New York 1962).

Ein Mathematiker und ein Pädagoge haben sich hier als Autoren zusammengetan, um ein Textbook für das erste Lehrjahr in der systematischen Geometrie zu verfassen. Sie haben den Versuch unternommen, einmal auf eine andere Art und Weise vom traditionellen Unterrichtsstil wegzukommen. Der nach Euklids Elementen ausgerichtete Aufbau des geometrischen Unterrichtes erzeugt durch das lange Verweilen im Bereiche des Trivialen und durch die starke Betonung des logischen Momentes bei Lehrer und Schüler Gefühle der Unlust. Die beiden Autoren wenden sich nicht vollständig von Euklid ab; sie stellen aber das ganze Gebäude auf nur fünf, dafür aber um so beweiskräftigere Axiome. Stetigkeitsfragen wird elegant ausgewichen, indem die Gesetze der reellen Zahlen bei der Formulierung der Axiome mitverwendet werden. Andererseits bewirkt eine Ähnlichkeitsaussage über Dreiecke unter den Axiomen, dass die Parallelenfrage nicht das übliche grosse Gewicht erhält. Bei dieser Basis resultiert eine völlig untraditionelle Reihenfolge des behandelten Stoffes; es ist zum Beispiel keine Trennung zwischen Kongruenz- und Ähnlichkeitslehre möglich. Die Ausarbeitung dieses Textbooks stützt sich auf langjährige Unterrichtserfahrungen und Diskussionen in pädagogischen Seminarien. Die erste Auflage erschien im Jahre 1940, vor uns liegt die dritte Auflage. Der Versuch ist beachtenswert und dürfte die Lehrer, die sich mit der Problematik des geometrischen Anfangsunterrichtes auseianderzusetzen haben, sehr interessieren. M. Jeger

Projective and Euclidean Geometry. Von W. T. Fishback. IX und 244 Seiten mit 100 Figuren. 57s (John Wiley and Sons INC, New York – London 1962).

Dieses Buch ist für Studierende der Mathematik in den untern Semestern gedacht, die zugleich in die Grundlagen der Geometrie und in die projektive Geometrie eingeführt werden sollen. Es beginnt mit einer Darlegung des Hilbertschen Axiomensystems der ebenen euklidischen Geometrie und baut anschliessend die reelle projektive Geometrie der Ebene durch Adjunktion der unendlichfernen Geraden auf. Der synthetische und der analytische Standpunkt kommen nacheinander in gleichem Masse zur Geltung. Die notwendigen Hilfsmittel aus der linearen Algebra werden in einem Zwischenkapitel bereitgestellt.

Nachdem der Stoff zu einem bestimmten Abschluss gebracht ist, bringt der Autor einen axiomatischen Aufbau der ebenen projektiven Geometrie; für eine Menge von Punkten und eine Menge von Geraden mit einer Inzidenzrelation werden 7 Axiome postuliert. Es wird dann gezeigt, dass die entstehende Geometrie als Koordinatengeometrie über einem Körper aufgefasst werden kann. Als Beispiele werden die vorher behandelte reelle