Aufgaben

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **19 (1964)**

Heft 1

PDF erstellt am: **30.06.2024**

und daraus folgt, dass man den Ursprung O in Abbildung 2 nachträglich an beliebiger Stelle der x-Achse annehmen kann. Dies bedeutet den Übergang zu den Parallelflächen von F, F^* im Abstand R_0. *Durch geeignete Wahl von R_0 kann also stets erreicht werden, dass beide Parallelflächen in P elliptisch gekrümmt sind.*

d) Die Dupinschen Indikatrizen einer Schar von Parallelflächen in den Punkten einer gemeinsamen Flächennormale n werden in Richtung n normal projiziert als eine Schar konfokaler Kegelschnitte. Durch F und F^* sind zwei solche Scharen mit gemeinsamem Mittelpunkt P' und Scharparameter R_0 gegeben; ihre Achsen schneiden sich unter dem Winkel α. Aus unseren Überlegungen folgt nun: *Berühren die beiden durch $R_0 = 0$ bestimmten Scharkurven einander, so berührt jede Kurve der einen Schar die zum selben Parameter R_0 gehörige Kurve der anderen Schar, und dabei sind die Tangenten in den Berührpunkten alle parallel.*

H. SCHAAL, Stuttgart

LITERATUR

[1] MANNHEIM, A.: Cours de géométrie descriptive. Paris 1880.

[2] SCHAAL, H.: Zur Konstruktion der Krümmungskreise des scheinbaren Umrisses einer Fläche bei Zentral- oder Parallelprojektion. Sitzb. Bayer. Akad. Wiss., math.-nat. Kl. 1960, S. 277–310.

[3] VOGLER, H.: Ein einfacher Beweis eines Satzes von H. Schaal über den Krümmungsmittelpunkt des scheinbaren Umrisses einer Fläche. Elem. Math. *17*, 79–81 (1962).

Aufgaben

Aufgabe 444. Als «unterer Höhenabschnitt» im Dreieck sei der Abstand des Höhenschnittpunktes von der Dreiecksseite bezeichnet. Man zeige: Die Summe der unteren Höhenabschnitte ist höchstens so gross wie die Summe der Abstände des Umkreiszentrums von den Dreiecksseiten. Gleichheit tritt nur im gleichseitigen Dreieck auf.

F. LEUENBERGER, Feldmeilen

Solution: Let AD, BE, CF denote the altitudes and H the orthocenter of the triangle ABC; let O denote the circumcenter and A', B', C' the midpoints of the sides of ABC. Then it is well known that

$$AH = 2\,A'O\,, \quad BH = 2\,B'O\,, \quad CH = 2\,C'O\,.$$

Thus the stated inequality

$$HD + HE + HF \le A'O + B'O + C'O\,, \tag{1}$$

with equality only when ABC is equilateral, is equivalent to

$$AH + BH + CH \ge 2\,(HD + HE + HF)\,. \tag{2}$$

When the triangle ABC is acute, H is an interior point and therefore (2) is a special case of the ERDÖS theorem.

For the general case we make use of the relations

$$HD = 2\,R\cos\beta\cos\gamma\,, \quad HE = 2\,R\cos\gamma\cos\alpha\,, \quad HF = 2\,R\cos\alpha\cos\beta\,,$$

$$A'O = R\cos\alpha\,, \quad B'O = R\cos\beta\,, \quad C'O = R\cos\gamma\,,$$

where R is the circumradius of ABC. Thus (1) is equivalent to

$$2\,\Sigma\cos\beta\cos\gamma \le \Sigma\cos\alpha\,. \tag{3}$$

It is only necessary to discuss the case $\alpha + \beta < 90°$. We may replace (3) by

$$2\cos\alpha\cos\beta + \cos(\alpha+\beta) \le (\cos\alpha + \cos\beta)\,(1 + 2\cos(\alpha+\beta))\,. \tag{4}$$

Now let $\alpha + \beta = 2\,\lambda$, where λ is fixed. Then

$$2\cos\alpha\cos\beta + \cos(\alpha+\beta) \le 2\cos^2\lambda + \cos 2\,\lambda = 1 + 2\cos 2\,\lambda\,.$$

On the other hand

$$(\cos\alpha + \cos\beta)\,(1 + 2\cos(\alpha+\beta)) \ge 1 + 2\cos 2\lambda\,,$$

so that we have proved (4).

Remark. The inequality

$$2\,\Sigma\,|\cos\beta\cos\gamma\,| \le \Sigma\,|\cos\alpha\,| \qquad (5)$$

does not hold generally. In particular (5) is false when α, β are very small.

L. CARLITZ, Duke University, Durham, N.C., USA

C. BINDSCHEDLER (Küsnacht) betrachtet den geometrischen Ort des Punktes P, für den die (mit Vorzeichen versehenen) Abstände von den Dreiecksseiten eine gegebene Summe $s(P)$ haben. Dieser Ort ist offenbar eine Gerade g, die sich bei *Zunahme* des Wertes von $s(P)$ parallel so verschiebt, dass die Ecken des Dreiecks in der Reihenfolge A_3, A_2, A_1 überstrichen werden, wenn für die Seiten $a_1 < a_2 < a_3$ vorausgesetzt ist. Eine genauere Betrachtung dieser Verschiebung zeigt, dass das Umkreiszentrum M *nach* dem Höhenschnittpunkt H überstrichen wird, wenn das Dreieck nicht gleichseitig ist.

L. BERNSTEIN (Tel Aviv) und J. STEINIG (Zürich) haben die Ungleichung der Aufgabe $s(H) \leqq s(M) = R + \varrho$ (R = Umkreisradius, ϱ = Inkreisradius) für spitzwinklige Dreiecke verschärft und $s(H) \leqq 3\,\varrho$ bewiesen[1]). Wie der Aufgabensteller bemerkt, lässt sich diese Ungleichung direkt aus $s(H) = \varrho^2/R + 2\,\varrho + r$ (r = Inkreisradius des Höhenfusspunktdreiecks) gewinnen, wenn man $\varrho/R \leqq 1/2$ und $r \leqq s(H)/6$ (Ungleichung von ERDÖS-MORDELL für das Höhenfusspunktdreieck) verwendet.

Aufgabe 445. Es sei p eine Primzahl der Form $8\,m + 3$ oder $8\,m + 5$ und k eine natürliche Zahl. Man beweise die Kongruenz

$$2^{p^k (p-1)/2} + 1 \equiv 0 \pmod{p^k}\,.$$

L. BERNSTEIN, Tel Aviv

Lösung: Für eine Primzahl $p \equiv \pm\,5 \pmod 8$ gilt nach dem zweiten Ergänzungssatz zum quadratischen Reziprozitätsgesetz $(2/p) = -1$, also nach dem Eulerschen Kriterium

$$2^{(p-1)/2} \equiv -1 \pmod p\,.$$

Nun folgt allgemein aus einer Kongruenz $a \equiv b \pmod p$ die Kongruenzenserie

$$a^{p^k} \equiv b^{p^k} \pmod{p^{k+1}}$$

für alle natürlichen k, wie man auf Grund der Teilbarkeit durch p der mittleren Binomialkoeffizienten $\binom{p}{q}$ $(q = 1, \ldots, p-1)$ leicht durch Schluss von k auf $k+1$ bestätigt. Mittels dieser allgemeinen Regel erhält man hier die Kongruenz

$$2^{p^k (p-1)/2} \equiv -1 \pmod{p^{k+1}}\,,$$

sogar nach einer um 1 höheren Potenz von p als in der Aufgabe behauptet.

H. HASSE, Hamburg

Auf dieselbe Weise erhält man für eine ungerade Primzahl p und eine zu p teilerfremde Zahl a die Formel

$$a^{p^k (p-1)/2} \equiv \left(\frac{a}{p}\right) \pmod{p^{k+1}}\,.$$

Weitere Lösungen sandten A. AIGNER (Graz), E. HÄRTTER (Mainz), H. MEILI (Winterthur), W. SCHÖNIGER, (Zürich), E. TEUFFEL (Korntal/Stuttgart).

1) Dieses Heft Seite 10.

Aufgabe 446. Existe-t-il un nombre entier $n > 1$ qui divise le nombre $2^{n-1} + 1$?

A. ROTKIEWICZ, Varsovie

Lösung: Nein. Es gibt keine Zahl $n > 1$, so dass $2^{n-1} + 1 \equiv 0$ (n). Zunächst ist n als Teiler der ungeraden Zahl $2^{n-1} + 1$ selbst ungerade, also $n - 1$ gerade. Somit bekommt $2^{n-1} + 1$ die Form $x^2 + 1$. Weil x mod. jedem Primteiler p von $x^2 + 1$ zum Exponenten 4 gehört, ist $p - 1 = 4\,m$, also hat $x^2 + 1$ nur Teiler der Form $4\,m + 1$ und n ist selbst von dieser Form, somit $n - 1$ durch 4 teilbar. Damit erhält aber die Zahl $2^{n-1} + 1$ die Form $x^4 + 1$, welche nur Teiler der Form $8\,m + 1$ hat, also ist auch n von dieser Form und $n - 1$ durch 8 teilbar. In dieser Weise geht das fort, da $x^{2^k} + 1$ nur Teiler der Form $2^{k+1}\,m + 1$ hat, so dass also $n - 1$ durch jede Potenz von 2 teilbar würde. Somit ist $n = 1$.

Dieser Schluss gilt übrigens auch allgemeiner für $a^{n-1} + 1 \equiv 0$ (n) mit geradem a. Bei ungeradem a jedoch gibt es Lösungen, z.B. $3^3 + 1 \equiv 0$ (4), allgemein $a^a + 1 \equiv 0$ $(a + 1)$.

A. AIGNER, Graz

E. TEUFFEL (Korntal/Stuttgart) gibt weitere Lösungen für den Fall einer ungeraden Basis: Es sei $g > 1$ eine ungerade Zahl. Für jedes Glied der unendlichen Zahlenfolge $n = g^{g^k} + 1$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$ gilt dann $g^{n-1} + 1 \equiv 0$ (n).

Weitere Lösungen sandten L. CARLITZ (Duke University, Durham/USA) und A. SCHINZEL (Warschau).

Aufgabe 447. Ein Torus (Meridiankreisradius $= r$, Kehlkreisradius $= R$) hängt so an einem geraden horizontalen Kreiszylinder (Zylinderradius $= \varrho$, $\varrho \leqq R$), dass die Zylinderachse senkrecht zur Kehlkreisebene steht. Um welchen Winkel kann der Torus, ohne sich abzuheben, um die gemeinsame Normale im Berührungspunkt gedreht werden? Wie lässt sich das Resultat für allgemeinere Ringe (Rohrflächen mit einer gegebenen Eilinie als Mittelpunktskurve) aussprechen?

E. TROST

1. Lösung: Eine Rohrfläche ϕ mit der (nicht notwendig ebenen) Mittenkurve m und dem Profilkreisradius r liegt genau dann im Äussern des gegebenen Kreiszylinders Z mit Achse a und Radius ϱ, wenn der Abstand von m und a mindestens gleich $\varrho + r$ ist; genau dann liegt auch m im Äussern des zu Z koaxialen Zylinders Z_1 mit Radius $\varrho + r$. Man erhält den gesuchten maximalen Drehwinkel α daher auch, indem man die Mittenkurve m um die gemeinsame Berührpunktnormale n von ϕ, Z, m und Z_1 soweit dreht, bis sich m vom Parallelzylinder Z_1 abhebt. Der Extremwinkel α hängt also, wenn m und a gegeben sind, vom Profilkreisradius r gar nicht ab.

Ist m speziell eine ebene Kurve, deren Ausgangslage m_0 in der Lotebene π von a durch n liegt, m' die Normalprojektion von m auf π und k_1 der Schnittkreis von Z_1 und π, so besteht zwischen m' und m_0 eine senkrechte Affinität mit der Achse n und dem Affinitätsverhältnis $\cos\alpha$, und es ist der kleinste Wert $\cos\alpha$ zu bestimmen, für den m' noch im Äussern von k_1 liegt.

Für den gegebenen Torus ist m ein Kreis mit Radius $R + r$ und m' eine Ellipse, bei der ein Scheitelkrümmungskreis den Radius $(R + r)\cos^2\alpha$ besitzt und in der Extremlage zum Kreis k_1 mit Radius $\varrho + r$ zusammenschrumpft. Aus der Gleichheit dieser beiden Radien ergibt sich der gesuchte Winkel α mit

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{\varrho + r}{R + r}}\,. \tag{1}$$

Ist m eine Eilinie, deren Ausgangslage m_0 in der Ebene π und im Äussern von Z_1 liegt und Z_1 in P_1 berührt, so gilt (1) nur dann, wenn m ganz im Äussern ihres Krümmungskreises k in P_1 verläuft und $R + r$ den Radius von k bezeichnet. Im allgemeinen wird m jedoch von k durchsetzt; dann lässt sich α nur aus dem Verlauf von m im Grossen bestimmen. Eine Abschätzung von α ergibt sich in diesem Fall aus einem Satz von W. BLASCHKE (Kreis und Kugel, S. 116): Wird der kleinste bzw. grösste Krümmungsradius von m mit $R^* + r$ bzw. $R^{**} + r$ bezeichnet, so ragt der Kreis k^* mit Radius $R^* + r$, der m in P_1 von innen berührt, nicht über m hinaus, und m ragt nicht über jenen Kreis k^{**} mit Radius $R^{**} + r$ hinaus, den m in P_1 von innen berührt. Für die Extremwinkel α^*, α, α^{**} der

Drehungen von k^*, m bzw. k^{**} um n ($\varrho \leqq R^*$) folgt daraus

$$\alpha^* \leqq \alpha < \alpha^{**}, \tag{2}$$

wobei α^*, α^{**} nach (1) mit $R = R^*$ bzw. $R = R^{**}$ bestimmt sind. Das Gleichheitszeichen in (2) gilt genau dann, wenn $k^* = k$ ist.

Eine andere Herleitung von (1) für die Eilinie m im Äussern von k geht vom Normalumriss u' von ϕ für die Projektionsrichtung a aus. Ist P der auf der Drehachse n liegende Berührpunkt von ϕ und Z, so ist Z' in der Extremallage von ϕ der Krümmungskreis von u' in P'. Sein Radius hängt ab von den Hauptkrümmungsradien von ϕ in P (der eine ist der Profilschnittradius r, der andere sei mit R bezeichnet) und vom Winkel α zwischen der Projektionsrichtung a und der zu r gehörenden Hauptkrümmungsrichtung, und zwar gilt nach A. MANNHEIM

$$\varrho = R\cos^2\alpha - r\sin^2\alpha, \tag{3}$$

und diese Formel ist gleichbedeutend mit (1).

Schliesslich kann (1) auch ausgehend von der Parallelfläche ϕ_2 von ϕ mit Profilkreisradius $\varrho + r$ hergeleitet werden: ϕ_2 berührt die Zylinderachse a in einem Punkt P_2 von n und ist um n soweit drehbar, bis eine Schmiegtangente von ϕ_2 in P_2 mit a zusammenfällt. Aus dem Verhältnis der Hauptkrümmungsradien $\varrho + r$ und $R - \varrho$ von ϕ_2 in P_2 folgt für diese Schmiegtangente

$$\tan^2\alpha = \frac{R-\varrho}{\varrho + r} \tag{4}$$

in Übereinstimmung mit (1). H. SCHAAL, Stuttgart

2. Lösung: Wir betrachten allgemeiner einen Torus T', der im Torus T hängt. Die Meridiankreisradien seien r, r' und die Kehlkreisradien R, R'. Der Berührungspunkt O sei Koordinaten-Anfangspunkt. Die Äquatorebenen in der Ausgangsstellung seien $x = 0$ (für T') und $y = 0$ (für T). Wir zeigen zunächst, dass der gesuchte Winkel nur abhängt vom Verlauf der beiden Flächen in der unmittelbaren Umgebung von O. Wir nehmen an, dass nach einer Drehung von T' um den Winkel α aus der Anfangslage die beiden Ringe in einem von O verschiedenen Punkte P aneinander stossen könnten. Es seien Z, Z' die Mittelpunkte der Flächen, M, M' die Mittelpunkte der durch P gehenden Meridiankreise und φ, φ' die Winkel OZM bzw. $OZ'M'$. Man erhält folgende Koordinaten:

$$\text{für } M\colon\ x = (R+r)\sin\varphi\,,\quad y = 0\,,\quad z = R - (R+r)\cos\varphi\,,$$

$$\text{für } M'\colon\ x' = (R'+r')\sin\varphi'\sin\alpha\,,\quad y' = (R'+r')\sin\varphi'\cos\alpha\,,\quad z' = (R'+r')\cos\varphi' - R'.$$

Der Ausdruck $s^2 = \overline{MM'}^2 = (x'-x)^2 + (y'-y)^2 + (z'-z)^2$ muss folgenden drei Bedingungen genügen:

$$\frac{\partial s^2}{\partial\varphi} = 0\,,\quad \frac{\partial s^2}{\partial\varphi'} = 0\,,\quad s^2 = (r+r')^2\,.$$

Die letzte Bedingung folgt daraus, dass die Kugeln um M und M' mit den Radien r und r' sich in P berühren müssen (gemeinsame Tangentialebene mit den Torusflächen). Die drei Bedingungen führen auf folgende Gleichungen

$$(R+R')\sin\varphi = (R'+r')\,(\cos\varphi\sin\varphi'\sin\alpha + \sin\varphi\cos\varphi') \tag{1}$$

$$(R+R')\sin\varphi' = (R+r)\,(\cos\varphi'\sin\varphi\sin\alpha + \sin\varphi'\cos\varphi) \tag{2}$$

$$\begin{aligned}(r+r')^2 = {} & 2\,(R+r)\,(R'+r')\,(\cos\varphi\cos\varphi' - \sin\varphi\sin\varphi'\sin\alpha) - 2\,(R+R')\times\\ & \times[(R'+r')\cos\varphi' + (R+r)\cos\varphi] + (R+r)^2 + (R'+r')^2 + (R+R')^2. \end{aligned} \tag{3}$$

Elimination von α aus (1), (3) und aus (2), (3) ergibt

$$U\cos\varphi + V\cos\varphi' = (R+R')\,[(R+r) + (R'+r')\cos\varphi\cos\varphi']\,,$$

$$U\cos\varphi' + V\cos\varphi = (R+R')\,[(R'+r') + (R+r)\cos\varphi\cos\varphi']$$

$$\text{mit } U = R^2 + R\,R' + R'^2 + R\,r + R'\,r' - r\,r'\,,\quad V = (R+r)\,(R'+r')\,.$$

Die Elimination von φ' führt auf eine quadratische Gleichung

$$A\cos^2\varphi + B\cos\varphi + C = 0\,,\quad \text{wobei } C = A\,. \tag{4}$$

Da das Gleichungssystem erfüllt ist mit $\varphi_1 = \varphi_1' = 0$ (was auch geometrisch evident ist), sind die beiden Lösungen von (4) $\cos\varphi_1 = 1$ und $\cos\varphi_2 = C/A = 1$. Somit ist

$$\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi_1' = \varphi_2' = 0$$

und P ist also identisch mit O.

Der gesuchte Winkel α ist nun offenbar derjenige, für den die Gleichungen (1) und (2) für von Null verschieden werdende «unendlich kleine» Winkel φ, φ' gerade noch gelten bis auf Grössen, die gegenüber φ, φ' verschwinden. Das gibt $(R + R')\,\varphi = (R' + r')\,(\varphi' \sin\alpha + \varphi)$, also

$$\sin\alpha = \lim \frac{\varphi(R - r')}{\varphi'(R' + r')} \quad \text{und analog} \quad \sin\alpha = \lim \frac{\varphi'(R' - r)}{\varphi(R + r)}.$$

Durch Multiplikation erhält man

$$\sin^2\alpha = \frac{(R - r')\,(R' - r)}{(R + r)\,(R' + r')}.$$

C. Bindschedler, Küsnacht

3. Lösung: Das Abheben im Sinn der Aufgabe (das heisst lokal im Berührungspunkt) setzt beim Drehen um die gemeinsame Normale für irgend zwei (analytische) Flächen F, F', die sich in P berühren, dann ein, wenn der Übergang von Berührung *ohne* zu solcher *mit* Durchdringung (im Reellen) erreicht wird. Dies ist dann der Fall, wenn es Normalschnitte mit gleicher Krümmung der beiden Schnittkurven zu geben beginnt. Anschaulich: wenn die Indikatrizen (Dupin) sich *berühren*. Ist φ der Drehwinkel des Normalschnittes gegen eine der Hauptrichtungen von F und α der Winkel der Hauptrichtungen von F' gegen die von F, so lautet die aus der Eulerschen Gleichung (oder aus der Definition der Indikatrix) erfliessende Gleichung

$$\frac{\cos^2\varphi}{R_1} + \frac{\sin^2\varphi}{R_2} = \frac{\cos^2(\alpha - \varphi)}{R_1'} + \frac{\sin^2(\alpha - \varphi)}{R_2'}.$$

Hieraus ergibt sich eine quadratische Gleichung für $\mathrm{tg}^2\varphi$. Im fraglichen Grenzfall verschwindet ihre Diskriminante:

$$\left(\frac{1}{R_1} - \frac{\cos^2\alpha}{R_1'} - \frac{\sin^2\alpha}{R_2'}\right)\left(\frac{1}{R_2} - \frac{\sin^2\alpha}{R_1'} - \frac{\cos^2\alpha}{R_2'}\right) - \sin^2\alpha\cos^2\alpha\left(\frac{1}{R_1'} - \frac{1}{R_2'}\right)^2 = 0.$$

Nach elementarer Umrechnung ergibt sich daraus für den gesuchten Drehwinkel α

$$\mathrm{tg}^2\alpha = -\mathrm{DV}\left(\frac{1}{R_1}, \frac{1}{R_2}; \frac{1}{R_1'}, \frac{1}{R_2'}\right) = -\mathrm{DV}\,(R_1, R_2; R_1', R_2')^{1)}.$$

Sind R, P die Krümmungsradien der Leitkurven und r, ϱ die Radien der Röhrenkreise zweier ovaler Ringe (bzw. Zylinder mit Ring), so hat man

$$R_1 = R - r,\ R_2 = -r,\ R_1' = \varrho,\ R_2' = -(P - \varrho)\ \left(\text{bzw. } \frac{1}{R_1'} = 0\right).$$

Die Lösung gilt auch für gewundene Ringe, wenn man die Hauptkrümmungen bestimmt hat. Im speziellen Fall, dass die gemeinsame Flächennormale auch *Hauptnormale* einer jeden der (gewundenen) Leitkurven der Röhre ist, gilt wie bei ebenen Ovalen, wenn man das DV ausrechnet:

$$\mathrm{tg}^2\alpha = \frac{(R - r - \varrho)\,(P - \varrho - r)}{(r + \varrho)\,(R + P - r - \varrho)}.$$

Sonst sind r bzw. ϱ mit den cos der bez. Winkel der Hauptnormalen gegen die Flächennormale zu multiplizieren.

Eine Kette ohne »Spiel« erhält man ($\alpha = 0$), wenn $R_1 = R_1'$ (oder $R_2 = R_2'$).

Georg Unger, Dornach

Eine mit der 1. Lösung verwandte Lösung sandte O. Baier (München).

---

1) Eine andere Begründung dieser Formel findet man in der Note von H. Schaal, dieses Heft S. 10.

Neue Aufgaben

Aufgabe 469. Wie gross ist der maximale Bruchteil der Fläche einer Ellipse E vom Achsenverhältnis $\lambda = a/b$, den man mit zwei kongruenten, zu E ähnlichen Ellipsen ohne gemeinsamen Flächenteil überdecken kann, wenn letztere ganz innerhalb von E liegen?

C. BINDSCHEDLER, Küsnacht

Aufgabe 470. K sei eine ebene konvexe beschränkte Punktmenge mit dem Flächeninhalt F, und Z ein beliebiger innerer Punkt von K. Die Gerade durch Z mit dem Richtungswinkel α ($0 \leqq \alpha < \pi$, Nullrichtung beliebig) hat mit K eine Strecke von der Länge $D(\alpha)$ gemeinsam. Dann gilt die Ungleichung

$$\frac{1}{2} F < \frac{1}{4} \int_0^\pi D^2(\alpha)\, d\alpha \leqq F ,$$

in der genau dann Gleichheit besteht, wenn K punktsymmetrisch und Z das Symmetriezentrum ist.

OTMAR REUTTER, Ochsenhausen, Deutschland

Aufgabe 471. Démontrer que si n est un entier > 2 et $F_n = 2^{2^n} + 1$, alors $F_n\, F_{n+1}\, F_{n+2}$ est un nombre pseudopremier. (Un nombre composé m est dit pseudopremier, s'il divise le nombre $2^m - 2$.)

A. ROTKIEWICZ, Varsovie

Aufgabe 472. a, b seien teilerfremde natürliche Zahlen. Die Anzahl der Lösungen der Diophantischen Gleichung

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{b}{a}$$

in der Form nicht geordneter Paare natürlicher Zahlen x, y werde mit $L\,(b, a)$ bezeichnet. Man bestimme $L\,(1, a)$, $L\,(2, a)$ und $L\,(4, a)$ in expliziter Form aus der Primzahlzerlegung von a.

L. BERNSTEIN, Tel Aviv

Aufgaben für die Schule

Es wird kein Anspruch auf Originalität der Aufgaben erhoben; Autoren und Quellen werden im allgemeinen nicht genannt. Die Daten für Aufgaben aus der Darstellenden Geometrie sind durchwegs so festgelegt, dass der Ursprung des Koordinatensystems in der Mitte des linken Randes eines Blattes vom Format A 4 gewählt werden soll, x-Achse nach rechts, y-Achse nach vorn, z-Achse nach oben, Einheit 1 cm. Anregungen und Beiträge sind zu senden an Prof. Dr. WILLI LÜSSY, Büelrainstrasse 51, Winterthur.

1. Ein Reservoir soll $V = 5000\ \mathrm{m}^3$ fassen. Es hat die Form eines geraden Kreiszylinders mit senkrecht stehender Achse. Die Ausführung des Bodens kostet $p = 250\ \mathrm{Fr/m}^2$, diejenige der Wand $q = 375\ \mathrm{Fr/m}^2$. Wie sind die Dimensionen zu wählen, damit die Kosten (ohne Dach) möglichst klein werden?

▶ $$r = \sqrt[3]{\frac{V q}{\pi p}} = 13{,}36\ \mathrm{m}\,; \quad h = \sqrt[3]{\frac{V p^2}{\pi q^2}} = 8{,}91\ \mathrm{m}\,.$$

2. Unter welchem Winkel α muss die Achse einer Walze (r; h) gegen die Projektionsebene geneigt sein, damit die Fläche der Normalprojektion ein Maximum wird?

▶ $$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{\pi r}{2 h}\,.$$

3. Die Ecken eines Dreiecks sind A (0; 0), B (u; v), C (u; $-v$). Das Dreieck rotiert um die y-Achse. Bei welcher Abszisse x ist es durch eine Parallele zur y-Achse zu zerlegen, damit die beiden Teile gleiche Volumen erzeugen?

▶ $$x = \frac{u}{\sqrt[3]{2}}.$$

4. Diskutiere und skizziere den Verlauf der Kurve mit der Gleichung

$$y = x \operatorname{Tg} x.$$

Bestimme insbesondere die Wendepunkte.

▶ Für die Wendepunkte ist die Gleichung $x = \operatorname{Ctg} x$ zu lösen.

$$x_w = \pm 1{,}200; \quad y_w = 1; \quad y'_w = x_w = \pm 1{,}200.$$

5. Die Gleichung

$$x^3 + (4 - 3i)\,x^2 + (1 - 11i)\,x - 6\,(1 + i) = 0$$

besitzt eine ganzzahlige reelle Wurzel. Bestimme sämtliche Wurzeln der Gleichung.

▶ $$x_1 = -3; \quad x_2 = 2i; \quad x_3 = -1 + i.$$

x_1 ist die ganzzahlige Wurzel von

$$3x^2 + 11x + 6 = 0.$$

Berichte

VSM/SSPM: Rapport sur l'Assemblée générale annuelle

Sion, 28 septembre 1963

C'est à Sion que notre société s'est réunie cette année pour son assemblée annuelle. Au début de l'après-midi, mathématiciens et physiciens siégèrent séparément. Les premiers entendirent une conférence du président de notre association, le professeur SÖRENSEN de Neuchâtel, qui fit «Quelques suggestions pratiques pour une réforme adaptée aux conditions de l'enseignement en Suisse». Après avoir relevé que l'alternative – mathématiques dites ensemblistes et modernes ou statu quo — est un piège, M. SÖRENSEN exprima l'avis que l'enseignement traditionnel consacre un temps disproportionné à la construction axiomatique de l'ensemble des nombres réels et à l'édification axiomatique complète de la géométrié euclidienne. Une décontraction bienvenue permettrait de gagner pas mal de temps qu'on pourrait consacrer à des traitements axiomatiques partiels reflétant l'importance de la méthode des postulats pour les mathématiques actuelles. Quelques exemples tirés de l'algèbre linéaire des espaces à deux et trois dimensions servirent à illustrer ce point de vue, sur quoi M. SÖRENSEN invita ses collègues à entreprendre ou poursuivre leurs essais dans ce domaine privilégié.

Les physiciens, malheureusement trop peu nombreux, participèrent à une discussion sur l'enseignement de la physique introduite par MM. KNECHT de Lausanne et FLORIN de Coire. Nos deux collègues rapportèrent sur les congrès OCDE respectivement de Cambridge et de Kiel où fut étudié, en vue d'une application éventuelle dans l'enseignement de la physique en Europe, le manuel mis au point aux Etats-Unis par le PSSC. Ce fut l'occasion pour nos collègues enseignant la physique, de discuter de quelques difficultés de leur enseignement qui occupe une place très variable dans les différents gymnases suisses. Chacun reconnut le manque regrettable d'un ouvrage de physique moderne adapté aux conditions de l'enseignement en Suisse. Le problème de la diffusion des rapports d'experts envoyés à l'étranger fut soulevé. Cette diffusion, cette information n'étant pas faite par la voie officielle, c'est à notre société qu'elle incombe. Enfin, l'idée de la création d'une commission de manuels pour la physique (éventuellement aussi d'un centre de documentation) fut émise.