Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft

Band: 19 (1964)

Heft: 2

Rubrik: Kleine Mitteilungen

notwendigerweise euklidisch ist. Der Sonderfall der euklidischen Geometrie fällt auch hier recht deutlich heraus. Auf der andern Seite zeigt das Bachmannsche Axiomen-System aber auch, dass weite Gebiete der Geometrie ganz ohne Stetigkeitsvoraussetzungen erfassbar sind.

Unser Abstecher von der Schulgeometrie in die allgemeine metrische Geometrie offenbart den Wandel in der geometrischen Forschung, der in einer vermehrten Algebraisierung dieses Gebietes zum Ausdruck kommt. Er lässt auch deutlich hervortreten, dass sogar die geometrische Grundlagenforschung von dieser Algebraisierung erfasst worden ist. M. JEGER, Luzern/Zürich

LITERATUR

BACHMANN, F.: *Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff*, in Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. 96 (Berlin, Göttingen, Heidelberg 1959).

BEHNKE, H., BACHMANN, F., FLADT, K., SÜSS, W.: *Grundzüge der Mathematik*, Band II, *Geometrie* (Göttingen 1960).

PICKERT, G.: *Ebene Inzidenzgeometrie*, Schriftenreihe zur Mathematik, Heft 8 (Frankfurt a.M. 1958).

THOMSEN, G.: *Grundlagen der Elementargeometrie in gruppenalgebraischer Behandlung*, Hamburger Math. Einzelschriften, 16. Heft (1933).

Kleine Mitteilungen

Verallgemeinerungen des Satzes von DANDELIN

M. CHASLES[1]) hat den bekannten Satz von G. P. DANDELIN[2]) über die Brennpunkte des ebenen Schnittes eines Drehkegels in folgender Weise verallgemeinert:

Sind zwei Flächen zweiter Ordnung einander einbeschrieben, so schneidet die Tangentialebene in einem Nabelpunkt der einen Fläche die andere in einem Kegelschnitt, die jenen Nabelpunkt zum Brennpunkt hat. Bei DANDELIN ist die eine Fläche eine Kugel, die einem Kegel einbeschrieben ist.

Dieser Satz ist aber nur ein Spezialfall eines noch allgemeineren, nämlich: *Sind zwei Flächen zweiter Ordnung einer dritten einbeschrieben und berühren sie einander in einem Punkt, der für die eine Fläche ein Nabelpunkt ist, so ist er auch für die zweite Fläche Nabelpunkt.*

Denn entartet die eine Fläche zu einem Kegelschnitt, so werden ihre Erzeugenden zu den Tangenten dieses Kegelschnittes, insbesondere aber die isotropen Erzeugenden in einem Nabelpunkt zu isotropen Tangenten des Kegelschnittes, der Nabelpunkt also zum Brennpunkt. Ist insbesondere die eine einbeschriebene Fläche eine Kugel, so ist die Berührung mit der zweiten immer ein Nabelpunkt.

Aber auch diese Verallgemeinerung ist nur ein Spezialfall eines weiteren, in der darstellenden Geometrie oft benutzten und auf G. MONGE[3]) zurückgehenden Satzes, nämlich:

Sind zwei Flächen zweiter Ordnung einer dritten einbeschrieben, so zerfällt ihre Durchdringungskurve in zwei Kegelschnitte.

Denn haben diese beiden Flächen eine Berührung, so zerfällt der eine Kegelschnitt in ein beiden Flächen gemeinsames Erzeugendenpaar durch den Berührungspunkt. Im Falle eines Nabelpunktes ist dieses Paar isotrop.

Schliesslich kann auch dieser Satz als Spezialfall eines noch allgemeineren aufgefasst werden, nämlich:

Gehören die Quadriken zweier Büschel einem Netz[4]) *an, so haben die Büschel eine Quadrik gemein.*

---

[1]) *Rapport sur les progrès de la géométrie*, (Paris 1870) p. 73–74.

[2]) Bruxelles nouv. mém. *2*, 172 (1822); *3*, 3 (1826).

[3]) Corr. polyt. *2*, 321 (1812); *3*, 299. (1816).

[4]) Vgl. G. LAMÉ: *Examen des différentes méthodes employées pour résoudre les problèmes de géométrie* (Paris 1818).

Denn zwei Quadriken, die einer dritten einbeschrieben sind, bestimmen mit dieser ein spezielles Netz, in dem die Ebenen der beiden Berührungskegelschnitte als Doppelebenen enthalten sind. Dann gibt es im Büschel der beiden Quadriken eine, die auch im entarteten Büschel der beiden Doppelebenen enthalten ist und die daher in ein Ebenenpaar zerfällt, nämlich in das Ebenenpaar der jenen beiden Quadriken gemeinsamen Kegelschnitte.

Damit erweist sich der Satz von DANDELIN als Spezialfall eines allgemeinen Satzes aus der Geometrie der linearen Systeme von Flächen zweiter Ordnung.

WOLFGANG BÖHM, Berlin

Une formule explicite pour un nombre pseudopremier par rapport à un nombre entier donné $a > 1$

On dit qu'un nombre naturel n est pseudopremier par rapport à un nombre naturel $a > 1$, si n est un nombre composé et tel que $n \mid a^{n-1} - 1$. Comme on sait, pour tout nombre naturel a il existe une infinité de tels nombres n (voir [2], [3]). Récemment Mr. R. CROCKER (voir [1]) a démontré que si a est un entier positif, pair $\neq 2^{2^k}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, alors pour $n = 1, 2, 3, \ldots$ le nombre $a^{a^n} + 1$ est pseudopremier par rapport au nombre a. Cette proposition montre d'une façon effective et très simple que pour tout nombre naturel a, où $2 \mid a \neq 2^{2^k}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, il existe une infinité de nombres pseudopremiers par rapport au nombre a. Cependant la formule de M. CROCKER ne comprend pas les cas $a = 2^{2^k}$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, ni les cas $2 \nmid a$. Je démontrerai ici la proposition suivante:

Théorème. a étant un entier donné > 1, *le nombre*

$$M = \frac{a^{a^{n^2}} - 1}{a^{a^n} - 1}, \quad \text{où} \quad n = 4, 5, 6, \ldots$$

est pseudopremier par rapport au nombre a.

Démonstration. Comme

$$M - 1 = \frac{a^{a^{n^2}} - a^{a^n}}{a^{a^n} - 1},$$

on a

$$a^{a^n} \,\Big|\, M - 1. \tag{1}$$

Vu que $n \geq 4$ et $a \geq 2$, on a $a^n \geq 2^n \geq n^2$. Donc, d'après (1), on a

$$M = \frac{a^{a^{n^2}} - 1}{a^{a^n} - 1} \,\Big|\, a^{a^{n^2}} - 1 \,\Big|\, a^{a^{a^n}} - 1 \,\Big|\, a^{M-1} - 1, \text{ donc } M \,\Big|\, a^{M-1} - 1.$$

Il reste à démontrer que M est un nombre composé. Comme $n \geq 4$, on a $n^2 > n + 1$ et $a^{a^{n+1}} - 1 \,\big|\, a^{a^{n^2}} - 1$, d'où il résulte que

$$N = \frac{a^{a^{n+1}} - 1}{a^{a^n} - 1} \,\Big|\, \frac{a^{a^{n^2}} - 1}{a^{a^n} - 1} = M$$

et, comme $a^{a^n} < a^{a^{n+1}} < a^{a^{n^2}}$, on a $1 < N < M$ et M est un nombre composé.

Notre théorème se trouve ainsi démontré.

BIBLIOGRAPHIE

[1] CROCKER, R.: *A Theorem on Pseudoprimes.* Amer. Math. Monthly *69*, 540 (1962).

[2] DUPARC, H. J. A.: *On Almost Primes,* Math. Centr. Amsterdam, Rapport Z.W. 1955-012.

[3] SCHINZEL, A.: *Sur les nombres composés n qui divisent* $a^n - a$, Rendic. Circ. Mat. di Palermo *7*, 37–41 (1958).

A. ROTKIEWICZ, Varsovie