Aufgaben

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **19 (1964)**

Heft 2

PDF erstellt am: **14.09.2024**

Aufgaben

Aufgabe 448. Es sind jene logarithmischen Spiralen zu ermitteln, die ihre eigenen Affinevoluten darstellen. W. WUNDERLICH, Wien

Lösung: Die ∞^1 Evolutoiden der in Polarkoordinaten (r, φ) gegebenen logarithmischen Spirale c

$$r = r_0\, e^{\varphi \cot \varepsilon} \tag{1}$$

sind gemeinsam mit c invariant gegen eine eingliedrige kontinuierliche Ähnlichkeitsgruppe und daher zu c kongruent. Eine dieser Evolutoiden ist die Affinevolute von c. Als Verallgemeinerung der Aufgabe werden zunächst jene (abzählbar vielen) Evolutoiden von c bestimmt, die mit c zusammenfallen:

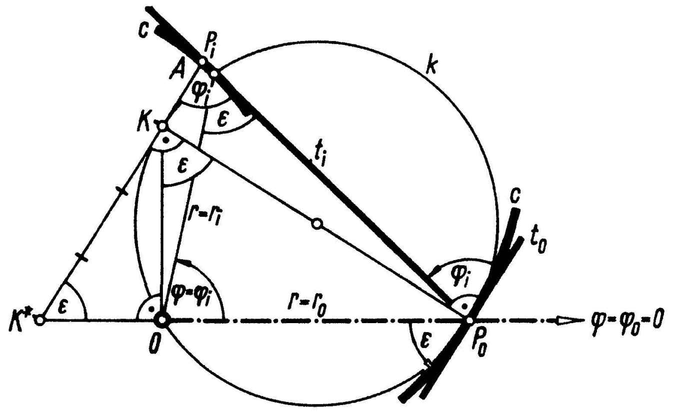
Nach (1) schneidet c alle Polstrahlen unter dem Winkel ε. Zieht man vom Punkt P_0 $(r_0, 0)$ alle Tangenten t_i $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ an c, so liegen ihre Berührpunkte P_i (r_i, φ_i), $(\varphi_0 = 0)$, also auf dem Fasskreis k des Winkels ε über $O\,P_0$ (Abb.) mit der Polargleichung

$$r = r_0 \frac{\sin(\varphi + \varepsilon)}{\sin \varepsilon}, \tag{2}$$

und es gilt $\sphericalangle\,(t_i, t_0) = \varphi_i$. Die Berührpunkte P_i genügen (1) und (2), und daraus folgt

$$e^{\varphi \cot \varepsilon} = \sin\varphi \cot\varepsilon + \cos\varphi\,. \tag{3}$$

Jedes der transzendenten Gleichung (3) genügende Wertepaar (ε, φ) legt eine logarithmische Spirale c fest, die mit ihrer durch den Winkel $\sphericalangle\,(t_i, t_0) = \varphi$ bestimmten Evolutoide zusammenfällt.



Ist eine der Tangenten t_i speziell die Affinnormale von (P_0, c), so ist c mit ihrer eigenen Affinevolute identisch. Ist K die erste, K^* die zweite Krümmungsmitte von (P_0, c) und A der Schnittpunkt von $[K\,K^*]$ mit der Affinnormalen von (P_0, c), so teilt K die Strecke $K^*\,A$ bekanntlich von innen im Verhältnis 3:1 (Abb.). Da K^* auf $P_0\,O$ liegt und $K^*\,A \parallel t_0$ ist, gilt also $(\varphi = \varphi_i)$

$$\cot\varepsilon = 3\cot\varphi\,. \tag{4}$$

Aus (3) und (4) erhält man

$$e^{3\varphi\cot\varphi} = 4\cos\varphi\,. \tag{5}$$

Jede Lösung von (5) bestimmt mit (4) eine logarithmische Spirale (1) der gesuchten Art. Die absolut kleinste Lösung von (5) ist näherungsweise $|\,\varphi_1\,| = 4{,}792$ und damit liefert (4) $\cot\varepsilon = \pm\,0{,}239$. Die übrigen Lösungen führen auf Kurven c, die ihre Affinnormalen erst nach einer bestimmten Anzahl von Umläufen berühren. H. SCHAAL, Stuttgart

Aufgabe 449. Die Dezimalbruchentwicklungen des Cosinus eines Winkels und des doppelten Winkels lauten

$$\cos\alpha = 0,\, abbb\ldots$$

$$\cos 2\alpha = 0,\, baaa\ldots,\; a \neq b\,.$$

Man bestimme a und b. W. LÜSSY, Winterthur

Lösung: Gegeben ist $\cos\alpha = A/90$ und $\cos 2\alpha = B/90$ ($A = 9a + b$, $B = 9b + a$). Wegen $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ ist $A^2 \equiv 0 \pmod{45}$, also $A \equiv 0 \pmod{15}$. Weil aber auch $\cos\alpha > 0{,}5\sqrt{2}$ ist, folgt hieraus schon $\cos\alpha = 5/6$, also $a = 8$, $b = 3$.

J. H. van Lint, Eindhoven

Weitere Lösungen sandten C.-G. d'Ambly (Jena), C. Bindschedler (Küsnacht), J. M. Ebersold (Winterthur), H. Gaebelein (Helmstedt), G. Güttler (Frankfurt a. M.) P. Hohler (Olten), W. Jänichen (Berlin), L. Kieffer (Luxemburg), F. Leuenberger (Feldmeilen), A. Mąkowski (Warschau), H. Meili (Winterthur), I. Paasche (München), O. Reutter (Ochsenhausen), J. Spilker (Freiburg i. Br.), Ch. Vuille (La Sagne).

Aufgabe 450. Es sei $1 < a_1 < a_2 \ldots < a_k$ eine Folge natürlicher Zahlen $\leqq n$, von denen keine durch eine andere Zahl der Folge teilbar ist. Die Folge sei in dem Sinn «maximal», dass keine weiteren Zahlen $\leqq n$ hinzugefügt werden können. (Ein Beispiel für $n = 12$ ist 4, 6, 7, 9, 10, 11.) Man zeige:

$$\min k = \pi(n) = \text{Anzahl der Primzahlen} \leqq n\,. \tag{1}$$

$$\min \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{a_i} = \sum_{j=[n/2]+1}^{n} \frac{1}{j}\,. \tag{2}$$

P. Erdös

Lösung: a) Für jede Primzahl $p_i \leqq n$ sei $q_i = p_i^{\alpha}$ die höchste Potenz von p_i, die $\leqq n$ ist. Sei weiter P_i die Menge der Zahlen $\leqq n$, die entweder Potenz von p_i oder Vielfaches von q_i sind. Weil alle $q_i > \sqrt{n}$ sind, ist $P_i \cap P_j$ leer für $i \neq j$. Jede maximale Folge M enthält aus jedem P_i mindestens ein Element, denn sonst könnte man q_i hinzufügen, also $k \geqq \pi(n)$. Weil $p_1, p_2, \ldots, p_{\pi(n)}$ eine maximale Folge ist, ist jetzt (1) bewiesen.

b) Es sei $M = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$ eine maximale Folge. Jede Zahl s mit $[n/2] < s \leqq n$, die nicht zu M gehört, ist ein Vielfaches von mindestens einem der $a_i \leqq [n/2]$. Da

$$\frac{1}{\nu} + \frac{1}{\nu+1} + \cdots + \frac{1}{2\nu - 1} < 1 \quad \text{für} \quad \nu \geqq 2\,,$$

ist $1/a_i$ schon grösser als die Summe aller Reziproken von Vielfachen von a_i zwischen $[n/2] + 1$ und n, also sicher

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{a_i} \geqq \sum_{j=[n/2]+1}^{n} \frac{1}{j}\,.$$

Weil $\{[n/2] + 1, \ldots, n\}$ eine maximale Folge ist, ist damit auch (2) bewiesen.

Bemerkung: Man sieht sofort ein, dass die in (b) erwähnte maximale Folge die «grösste» ist, das heisst $\max k = n - [n/2]$.

J. H. Van Lint, Eindhoven

Eine weitere Lösung legte J. Spilker (Freiburg/Br.) vor.

Aufgabe 451. Auf einer schiefen Ebene lässt man eine massive Kugel und eine massive Pseudosphäre längs einer Fallinie abrollen. v_K und v_P seien die Rollgeschwindigkeiten in dem Punkt, dessen Höhenunterschied zum Ausgangspunkt h beträgt. v_{HK} bzw. v_{HP} seien die Rollgeschwindigkeiten für die entsprechenden Hohlkörper (Wandstärke $\to 0$). Man berechne die Verhältnisse $v_K : v_{HK}$, $v_P : v_{HP}$, $v_P : v_K$, $v_{HP} : v_{HK}$.

K. Wanka, Wien

Lösung des Aufgabenstellers: Die Rollgeschwindigkeit v eines Rotationskörpers der Masse m nach Durchlaufen eines bestimmten Niveauunterschiedes h auf einer schiefen Ebene berechnet sich nach der Formel

$$m\,g\,h = m\,\frac{v^2}{2} + J\,\frac{\omega^2}{2}\,,$$

wobei J das axiale Trägheitsmoment, $\omega = v/r$ die Winkelgeschwindigkeit beim Rollkreisradius r und g die Erdbeschleunigung bedeutet.

Für die Kugel ergibt sich mit $J_K = 2\,m\,r^2/5$ der Wert $v_K = \sqrt{10\,g\,h/7}$. Ist $\alpha = r_1/r_2 < 1$ das Radienverhältnis einer Hohlkugel, so ist

$$v_{HK} = \sqrt{\frac{10\,g\,h}{5 + 2\,(1 - \alpha^5)/(1 - \alpha^3)}}\,.$$

Für $\alpha \to 1$ gilt $v_{KH} \to \sqrt{6\,g\,h/5}$.

Die Traktrix, aus der durch Rotation die Pseudosphäre entsteht, hat die Gleichung

$$x = c \ln \frac{c + \sqrt{c^2 - y^2}}{y} - \sqrt{c^2 - y^2}\,.$$

Hieraus ergibt sich als Volumen der Pseudosphäre $V_P = 2\,\pi\,c^3/3$. Für das Trägheitsmoment erhält man

$$J_P = 4\,\pi \int_0^c x\,y^3\,dy = 4\,\pi\,c \int_0^c y^3 \ln \frac{c + \sqrt{c^2 - y^2}}{y}\,dy - 4\,\pi \int_0^c y^3 \sqrt{c^2 - y^2}\,dy\,.$$

Durch partielle Integration geht das erste Integral über in

$$\pi c^2 \int_0^c y^3\,(c^2 - y^2)^{-1/2}\,dy = 2\,\pi\,c^5/3\,.$$

Das zweite Integral hat den Wert $8\,\pi\,c^5/15$ und damit ist $J_P = 2\,\pi\,c^5/15 = m\,c^2/5$. Für die Rollgeschwindigkeiten findet man analog wie bei der Kugel $v_P = \sqrt{5\,g\,h/3}$, $v_{HP} = \sqrt{3\,g\,h/2}$.

Für die gesuchten Verhältnisse ergeben sich bemerkenswert nahe bei 1 liegende Werte:

$$v_K : v_{HK} = 5/\sqrt{21} = 1{,}09;\quad v_P : v_{HP} = \sqrt{10}/3 = 1{,}05;$$
$$v_P : v_K = \sqrt{7/6} = 1{,}08;\quad v_{HP} : v_{HK} = \sqrt{5}/2 = 1{,}12.$$

Aufgabe 452. Durch die Eckpunkte A_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ eines konvexen Vierecks werden in der Ebene vier Geraden bestimmt. $M_{i+2} = M_k$ $[i + 2 \equiv k \pmod 4]$ sei der Fusspunkt des von einem Punkt P der Ebene auf $\overline{A_i A_{i+1}}$ gefällten Lotes. Man bestimme den geometrischen Ort der Punkte P, für die $\overline{M_1 M_2} = \overline{M_3 M_4}$. (Ähnliche Aufgaben ergeben sich, indem man dem Viereck $M_1\,M_2\,M_3\,M_4$ andere Eigenschaften vorschreibt.)

J. Brejcha, Brno

Solution: Si α_2 et α_4 sont les angles du quadrilatère convexe en A_2 et A_4, on a $\overline{M_1 M_2} = \overline{P A_4} \sin\alpha_4$ puisque les points P, A_4, M_1, M_2 sont sur une circonférence de diamètre $P\,A_4$. On a de même $\overline{M_3 M_4} = \overline{P A_2} \sin\alpha_2$. La condition $\overline{M_1 M_2} = \overline{M_3 M_4}$ devient

$$\overline{P A_4} \sin\alpha_4 = \overline{P A_2} \sin\alpha_2 \text{ ou bien } \overline{P A_2} : \overline{P A_4} = \sin\alpha_4 : \sin\alpha_2\,.$$

Mais si r_2 et r_4 sont les rayons des cercles circonscrits aux triangles $A_1\,A_2\,A_3$ et $A_1\,A_4\,A_3$, on a $\overline{A_1 A_3} = 2\,r_2 \sin\alpha_2 = 2\,r_4 \sin\alpha_4$, d'où $\sin\alpha_4 : \sin\alpha_2 = r_2 : r_4$. On a donc: $\overline{P A_2} : \overline{P A_4} = r_2 : r_4 =$ constante. Le lieu géométrique du point P est donc *un cercle d'Apollonius*, lieu géométrique des points, dont le rapport des distances aux points A_2 et A_4 est égal au rapport des rayons des circonférences circonscrites aux triangles $A_1\,A_2\,A_3$ et $A_1\,A_4\,A_3$.

Ch. Vuille, La Sagne

Weitere Lösungen sandten C. Bindschedler (Küsnacht) und G. Güttler (Frankfurt a. M.).

Aufgabe 453. Démontrer qu'il existe pour tout nombre naturel n un polynôme $f(x)$ aux coefficients entiers tel que chacun des nombres $f(1), f(2), \dots, f(n)$ est premier et que $f(1) < f(2) < \cdots < f(n)$.

W. Sierpiński, Varsovie

1. Lösung: Sei n eine beliebige natürliche Zahl. Mit Dirichlets Primzahlsatz findet man sukzessiv natürliche Zahlen $g_1, g_2, \dots, g_n$, so dass

$$p_m = 1 + n! \sum_{\nu=1}^{m} \binom{m}{\nu} g_\nu \quad (1 \leqq m \leqq n)$$

Primzahlen sind. Dann hat das Polynom

$$f(x) = 1 + n! \sum_{\nu=1}^{n} g_\nu \binom{x}{\nu}$$

vom Grade n die gewünschten Eigenschaften, denn seine Koeffizienten sind offenbar ganzzahlig, und es ist $f(m) = p_m$ für $1 \leqq m \leqq n$ Primzahl sowie $p_1 < p_2 < \cdots < p_n$.

Zusatz: Es gibt kein nichtkonstantes Polynom $f(x)$ mit ganzzahligen Koeffizienten, so dass $f(1), f(2), \ldots$ Primzahlen sind (siehe Polyà-Szegö, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis II, Abschnitt VIII, Aufgabe 97). Denn ist n_1, n_2 natürlich, $f(n_1) = p_1$, $f(n_2) = p_2$ mit verschiedenen Primzahlen p_1 und p_2, so gibt es ein natürliches n_3 mit $n_3 \equiv n_1 \pmod{p_1}$ und $n_3 \equiv n_2 \pmod{p_2}$, und $f(n_3)$ ist durch $p_1 p_2$ teilbar, also keine Primzahl.

J. Spilker, Freiburg i. Br.

2nde Solution: Soit n un nombre naturel donné. D'après le théorème de Lejeune-Dirichlet sur la progression arithmétique (et même d'après un cas particulier de ce théorème pour les progressions $m\,t + 1$ qui a été démontré récemment d'une façon élémentaire par M. A. Rotkiewicz[1])) il existe pour tout nombre naturel $k \leqq n$ un nombre naturel t_k tel que le nombre $q_k = (k-1)!\,(n-k)!\,t_k + 1$ est premier et que $q_k > q_{k-1}$, si q_{k-1} est déjà défini. Soit

$$f(x) = 1 + \sum_{j=1}^{n} (-1)^{n-j} \frac{(x-1)(x-2)\ldots(x-n)}{x-j}\, t_j\,.$$

Ce sera un polynôme du degré $\leqq n-1$ aux coefficients entiers et, comme on le vérifie sans peine, on aura $f(k) = 1 + (k-1)!\,(n-k)!\,t_k = q_k$ pour $k = 1, 2, \ldots, n$.

Remarque: On démontre sans peine qu'il existe pour tout nombre naturel n un polynôme $f(x)$ aux coefficients rationnels, tel que, pour $k = 1, 2, \ldots, n$, $f(k)$ est le k-ième nombre premier. Or il n'existe aucun polynôme $f(x)$ aux coefficients entiers, tel que $f(1) = 2$, $f(2) = 3$ et $f(3) = 5$. Il se pose le problème, quels sont les nombres naturels n pour lesquels il existe un binôme $a\,x + b$ qui pour $x = 1, 2, \ldots, n$ donne n nombres premiers distincts. Nous savons actuellement démontrer qu'il est ainsi pour $n \leqq 13$. En effet, M. V. Golubev a communiqué que M. N. Seredinsky a trouvé que le binôme $f(x) = 60060\,x - 55117$ donne pour $x = 1, 2, \ldots, 13$ des nombres premiers (évidemment tous distincts).

Or, il est encore à remarquer qu'il résulte de l'hypothèse de M. A. Schinzel sur les nombres premiers (énoncée dans les Acta Arithmetica *4*, 188 (1958)) qu'il existe tout nombre naturel n des nombres naturels a et b tels que, pour $x = 1, 2, \ldots, n$, les nombres $f(x) = a\,x + b$ sont n nombres premiers consécutifs (Voir l.c., p. 191, conséquence $C_{1,1}$).

George Browkin, Varsovie

Eine weitere Lösung sandte E. Teuffel (Stuttgart).

Bemerkung zur Aufgabe 434. Die (übrigens allgemein bekannte) Behauptung von Bager über die Pascalmatrix: «Die beiden Gleichungssysteme

$$\begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \\ . \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ 1 & 1 & & \\ 1 & 2 & 1 & \\ . & . & . & . \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ . \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 & & & \\ -1 & 1 & & \\ 1 & -2 & 1 & \\ . & . & . & . \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \\ g_2 \\ . \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ . \end{pmatrix}$$

folgen auseinander» ist der Spezialfall $n = \pm z = -1$ der sogar für unbestimmte z und alle rationalen n ($\gtreqless 0$) gültigen Formel

$$\begin{pmatrix} 1\,z^0 & & & \\ 1\,z^1 & 1\,z^0 & & \\ 1\,z^2 & 2\,z^1 & 1\,z^0 & \\ . & . & . & . \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1\,z^0\,n^0 & & & \\ 1\,z^1\,n^1 & 1\,z^0\,n^0 & & \\ 1\,z^2\,n^2 & 2\,z^1\,n^1 & 1\,z^0\,n^0 & \\ . & . & . & . \end{pmatrix}. \tag{1}$$

[1]) A. Rotkiewicz: *Démonstration arithmétique de l'existence d'une infinité de nombres premiers de la forme $n\,k + 1$.* Enseign. math. *7*, 277-280 (1961).

Aufgabe 333 behandelte nur den Fall ganzrationaler n nebst $z = \pm 1$. Auf die Indices (Argumente) 0, 1, 2, ... der f_ν und g_ν kommt es hier gar nicht an, denn man kann ja $f_0, f_1, f_2, \ldots = a, b, c, \ldots$ und $g_0, g_1, g_2, \ldots = A, B, C, \ldots$ setzen, und sogar von den f_ν, g_ν ganz absehen, nämlich nur die zugrundeliegende Matrixidentität (1) betrachten. Aufgabe 434 ist also unnötig kompliziert formuliert.

Beweis von (1): Vollständige Induktion nach n zeigt sofort, dass (1) für alle ganzrationalen n ($\gtreqless 0$) gilt. Nun ist aber in (1) die rechte Seite wiederum vom Typus einer Basismatrix der linken Seite, nämlich mit $z\,n$ statt z. Der Exponent n darf demnach auch einen Nenner ν besitzen, der sich durch beiderseitiges Erheben zur ν-ten Potenz beseitigen lässt. Daher gilt (1) für alle rationalen n ($\gtreqless 0$), qed.

I. PAASCHE, München

Neue Aufgaben

Aufgabe 473. Einem Kreis vom Radius r sind drei kongruente Ellipsen einzubeschreiben, die sich paarweise so berühren, dass sie eine Figur mit drei Symmetrieachsen bilden. Welche numerische Exzentrizität müssen die Ellipsen haben, damit sie den grösstmöglichen Teil der Kreisfläche bedecken und wie gross wird dieser Bruchteil?

C. BINDSCHEDLER, Küsnacht

Aufgabe 474. Sind $a_1, \ldots, a_n$ ($n \geqq 2$) die aufeinanderfolgenden Seiten eines ebenen, geschlossenen Polygons und α_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) die gleichsinnig orientierten Aussenwinkel zwischen den Seiten a_k und a_{k+1}, dann gilt die Ungleichung

$$\sum_{k=1}^{n} a_k\, a_{k+1} \cos\alpha_k \leqq \cos\frac{2\pi}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k^2 ,$$

in welcher Gleichheit dann und nur dann besteht, wenn das Polygon affin-regulär ist.

O. REUTTER, Ochsenhausen

Aufgabe 475. Für $n, k = 0, 1, 2, \ldots$ beweise man die Identität

$$\sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \binom{n}{\nu} \binom{z+k+\nu}{k+1}^{-1} = \frac{k+1}{z} \binom{z+k+n}{k+n}^{-1} .$$

I. PAASCHE, München

Aufgabe 476. Démontrer qu'il existe une infinité des entiers positifs, tels que si dans leur développement décimal on change un seul chiffre, on n'obtient jamais un nombre premier, et trouver le plus petit tel entier.

W. SIERPIŃSKI, Varsovie

Aufgaben für die Schule

Es wird kein Anspruch auf Originalität der Aufgaben erhoben; Autoren und Quellen werden im allgemeinen nicht genannt. Die Daten für Aufgaben aus der Darstellenden Geometrie sind durchweg so festgelegt, dass der Ursprung des Koordinatensystems in der Mitte des linken Randes eines Blattes vom Format A4 gewählt werden soll, x-Achse nach rechts, y-Achse nach vorn, z-Achse nach oben, Einheit 1 cm. Anregungen und Beiträge sind zu senden an Prof. Dr. WILLI LÜSSY, Büelrainstrasse 51, Winterthur.

1. Eine Kettenlinie mit kleinem Durchhang kann mit guter Näherung durch einen Kreisbogen ersetzt werden, der zwischen den beiden Aufhängepunkten dieselbe Länge besitzt. Berechne für die Aufhängepunkte A (0; 54), B (167; 26,8) und die Bogenlänge $b = 174$ den Radius r des Kreisbogens, sowie die Koordinaten des tiefsten Punktes T.

▶ $r = 213{,}0$; T (114,9; 20,3).

Für die Kettenlinie ergibt sich der Scheitelpunkt S (115,13; 20,07) und der Krümmungsradius im Scheitelpunkt $h = 200{,}72$.

2. $P(x;y)$ sei ein Punkt der Kettenlinie $y = h\,\mathrm{Cos}(x/h)$. Die Strecke $P\,U$ auf der Kurvennormale von P bis zur x-Achse ist so lang wie der Krümmungsradius in P.

▶ Ist Q der zu P gehörige Punkt der Evolvente (Tractrix), so besitzt das rechtwinklige Dreieck $P\,P'\,Q$ mit der Hypotenuse $P\,P' = y$ die Katheten $P\,Q = s$ in der Kurventangente und $P'\,Q = h$. Aus ähnlichen Dreiecken ergibt sich

$$P\,U = \frac{y^2}{h} = |\varrho|\,.$$

3. Welcher Punkt $P(x;y)$ der Kettenlinie $y = \mathrm{Cos}\,x$ liegt dem Punkt $U(6;0)$ am nächsten?

▶ Nach dem Ergebnis der vorangehenden Aufgabe erhält man aus dem Dreieck $P\,P'\,U$ sofort

$$(6-x)^2 = \mathrm{Cos}^4 x - \mathrm{Cos}^2 x = \mathrm{Cos}^2 x\,\mathrm{Sin}^2 x$$

$$12 - 2x = \mathrm{Sin}\,2x\,.$$

Mit $2x = z$ ist die Gleichung $\mathrm{Sin}\,z + z = 12$ zu lösen.

$$x = 1{,}452\,; \quad y = 2{,}253\,.$$

4. Zeige durch Reihenentwicklung beider Seiten, dass für kleine Werte von x gilt

$$\mathrm{Cos}\,x \approx 4 - \sqrt{9 - 3x^2}\,.$$

▶ $$4 - \sqrt{9-3x^2} - \mathrm{Cos}\,x = \frac{x^6}{180} + \cdots, \quad |x| < \sqrt{3}\,.$$

Eine Ellipse mit den Halbachsen $a = \sqrt{3}$, $b = 3$ ist somit eine vorzügliche Annäherung an die Cos-Kurve in der Umgebung des Scheitelpunktes. Für $x = 1$ ergibt sich ein absoluter Fehler von $-0{,}0073$.
Entsprechend gilt

$$\cos x \approx 4 - \sqrt{9 + 3x^2}\,.$$

Die Näherungskurve ist ein Hyperbelast. Für $x = \pi/6$ beträgt der absolute Fehler $+0{,}0001$.

5. Eine Kette mit der Gleichung $y = h\,\mathrm{Cos}(x/h)$ ist an zwei gleich hohen Punkten $P(\pm x_0; y_0)$ aufgehängt.
   a) Bestimme die Lage ihres Schwerpunktes S.
   b) Ist N der Schnittpunkt der Kurvennormale in einem Aufhängepunkt mit der y-Achse, so ist S der Mittelpunkt der Strecke $O\,N$.

▶ $$O\,S = \frac{O\,N}{2} = \frac{h\,\mathrm{Cos}\dfrac{x_0}{h}\,\mathrm{Sin}\dfrac{x_0}{h} + x_0}{2\,\mathrm{Sin}\dfrac{x_0}{h}}\,.$$

Literaturüberschau

Pythagorean Triangles. Von W. Sierpiński. The Scripta Mathematica Studies Nr. 9, 107 Seiten. Graduate School of Science, Yeshiva University, New York 1962.

Die erste Auflage dieses Büchleins erschien 1954 in polnischer Sprache. Die vorliegende, von A. Sharma besorgte Übersetzung enthält einige neue Paragraphen.

Der berühmte Verfasser zeichnet in seiner bekannten klaren und anregenden Darstellungsweise ein buntes Bild der verschiedenartigen zahlentheoretischen Resultate und Probleme, die im Zusammenhang mit den pythagoräischen Zahlen stehen. Viele Beweise