Euklidische und pseudoeuklidische Sätze über Kreis und gleichseitige Hyperbel

Autor(en): **Schaal, H.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

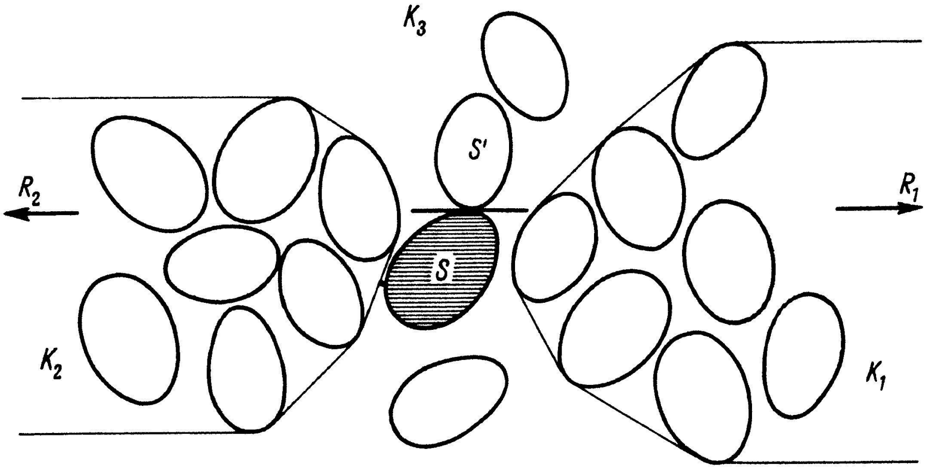
Band (Jahr): **19 (1964)**

Heft 3

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-23299

tung R_1 verschieben lassen[2]), wodurch sich auch S in dieser Richtung verschieben lässt.



Figur 7

Ist eine Scheibenpackung vorgegeben, so liegt die Definition der Blockierungszahl einer Scheibe auf der Hand. Die oben definierte Blockierungszahl der Packung ist dann die Blockierungszahl der am stärksten blockierten Scheibe. Neue Probleme entstehen, wenn wir statt dieser «oberen Blockierungszahl» die «mittlere Blockierungszahl» betrachten, das heisst das arithmetische Mittel der Blockierungszahlen der einzelnen Scheiben. Weitere Fragen erheben sich in Verbindung mit der «Schlüsselzahl» einer Packung. Man kann in einer Packung gewisse Scheiben so angeben, dass sie sich sukzessiv entfernen lassen und dass nach ihrer Entfernung auch alle übrigen Scheiben zugänglich werden. Die Schlüsselzahl ist die kleinstmöglichste Anzahl solcher Scheiben. Es handelt sich um die kleinstmögliche Anzahl der zu deponierenden Autoschlüssel.

GÁBOR FEJES TÓTH, Budapest

Euklidische und pseudoeuklidische Sätze über Kreis und gleichseitige Hyperbel

Die Metrik der euklidischen Ebene stützt sich bekanntlich auf ein konjugiert komplexes Fernpunktepaar (I_1, I_2). Ersetzt man dieses durch ein reell getrenntes Fernpunktepaar (I_1^*, I_2^*), so gehen gewisse Sätze der reellen euklidischen Geometrie in analoge Sätze der reellen pseudoeuklidischen Geometrie über; durch geeignete euklidische Deutung können hieraus neue Sätze der euklidischen Geometrie gewonnen werden. Geht man beispielsweise aus vom euklidischen Höhenschnittpunktsatz:

1. *Die drei Höhen eines Dreiecks $P_1 P_2 P_3$ schneiden sich in einem Punkt Q,*

so sind zunächst die im euklidischen Sinn senkrechten Geradenpaare – das sind jene, die in bezug auf das (als zerfallende Kurve 2. Klasse aufgefasste) absolute Punktepaar (I_1, I_2) konjugiert sind – durch Geradenpaare zu ersetzen, die in bezug auf (I_1^*, I_2^*)

[2]) Die Tatsache, dass sich in einer Packung endlich vieler konvexer Scheiben eine Scheibe in einer beliebig vorgegebenen Richtung verschieben lässt, ist nicht trivial. Im dreidimensionalen Raum gilt die analoge Behauptung nicht mehr. Siehe den in Fussnote 1 zitierten Aufsatz.

konjugiert sind; sie werden in [7][1]) «*C-normal*» genannt. Bezeichnet man im Dreieck $P_1 P_2 P_3$ die von einer Ecke auf ihre Gegenseite gezogene C-Normale als «*C-Höhe*», so lautet der zu 1. analoge Satz der pseudoeuklidischen Geometrie:

1*. *Die drei C-Höhen eines Dreiecks $P_1 P_2 P_3$ schneiden sich in einem Punkt Q^*.*

Dieser Satz 1* bedarf keines besonderen Beweises, denn die projektive Fassung des Beweises von 1. gilt auch für 1*: Durch die Grundpunkte P_1, P_2, P_3 und eine Punktinvolution $\mathfrak{J}$ auf einer allgemein liegenden Geraden wird ein Kegelschnittbüschel $\mathfrak{B}$ mit dem vierten Grundpunkt P_4 bestimmt. Die drei zerfallenden Büschelkurven werden von den Seiten und – je nachdem man (I_1, I_2) oder (I_1^*, I_2^*) als Fixpunkte von $\mathfrak{J}$ wählt – den Höhen bzw. C-Höhen des Dreiecks $P_1 P_2 P_3$ gebildet, und entsprechend gilt daher $P_4 = Q$ bzw. $P_4 = Q^*$.

Legt man nun in einem *euklidischen Modell* der pseudoeuklidischen Ebene das reelle Fernpunktepaar (I_1^*, I_2^*) durch zwei beliebige euklidisch normale Richtungen fest, so sind zwei Gerade genau dann C-normal, wenn ihre euklidischen Symmetralen durch I_1^* und I_2^* gehen. Durch diese euklidische Deutung folgt aus 1*. der neue Satz der euklidischen Geometrie:

1′. *Zieht man durch jede Ecke eines Dreiecks $P_1 P_2 P_3$ die Parallele zu der an einer beliebigen festen Achse $O I_1^*$ (oder $O I_2^*$) gespiegelten Gegenseite, so schneiden sich diese drei Parallelen in einem Punkt Q^*.*

In diesem euklidischen Modell werden die pseudoeuklidischen Kreise bekanntlich durch gleichseitige Hyperbeln mit den Fernpunkten I_1^* und I_2^* dargestellt (vergleiche zum Beispiel [6, Seite 142–143], [7, Seite 133], [10, Seite 298]); gewisse Sätze über den Kreis lassen sich daher in der angegebenen Weise auf die gleichseitige Hyperbel übertragen und dann euklidisch deuten. Man kann jedoch auch umgekehrt von euklidischen Sätzen über die gleichseitige Hyperbel ausgehen und zusehen, welche neuen Sätze sich nach obigem Muster daraus gewinnen lassen. Als Beispiel mögen die folgenden dienen:

2. *Sind P_i $(i = 1, 2, 3)$ drei Punkte einer gleichseitigen Hyperbel c, so liegt der Höhenschnittpunkt Q des Dreiecks $P_1 P_2 P_3$ ebenfalls auf c.*

3. *Schneiden sich ein Kreis c^* und eine gleichseitige Hyperbel c in drei reellen Punkten P_i, so ist ihr vierter Schnittpunkt P der zum Höhenschnittpunkt Q des Dreiecks $P_1 P_2 P_3$ diametrale Hyperbelpunkt.*

Zum Beweis des auf CH. BRIANCHON und J. PONCELET zurückgehenden Satzes 2 (vergleiche zum Beispiel [5], [8, I, Seite 327], [9, II, Seite 644]) ist nur zu beachten, dass die gleichseitigen Hyperbeln als jene Kegelschnitte charakterisiert werden können, die auf der Ferngeraden ein Punktepaar der absoluten Involution $\mathfrak{J}$ ausschneiden, und dass alle Kegelschnitte, die durch P_1, P_2, P_3 und ein Punktepaar von $\mathfrak{J}$ gehen, ein Büschel $\mathfrak{B}$ bilden, dessen vierter Grundpunkt P_4 nach 1. im euklidischen Fall der Höhenschnittpunkt Q des Dreiecks $P_1 P_2 P_3$ ist.

Bei der Übertragung von 2. in die pseudoeuklidische Geometrie ist die gleichseitige Hyperbel c durch einen Kegelschnitt c^* zu ersetzen, dessen Fernpunkte zum Paar (I_1^*, I_2^*) harmonisch liegen. Ersetzt man auch Q durch Q^*, so geht 2. in einen pseudoeuklidischen Satz 2* über, für den der projektive Beweis von 2. ebenfalls gilt.

---

[1]) Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 56.

Im eingeführten euklidischen Modell der pseudoeuklidischen Ebene wird c^* durch einen Kegelschnitt dargestellt, für den die Richtungen $O\,I_1^*$, $O\,I_2^*$ nicht nur konjugiert, sondern auch euklidisch normal und daher die Hauptachsenrichtungen sind. Damit erhält man aus 2*. den neuen euklidischen Satz:

2'. *Sind P_i $(i = 1, 2, 3)$ drei Punkte eines Kegelschnitts c^* mit Hauptachsenrichtung $O\,I_1^*$ (und $O\,I_2^*$), so liegt der nach 1'. bestimmte C-Höhenschnittpunkt Q^* des Dreiecks $P_1\,P_2\,P_3$ ebenfalls auf c^*.*

Satz 2' gilt insbesondere auch für den Umkreis des Dreiecks $P_1\,P_2\,P_3$, und dies bedeutet:

2''. *Der euklidische (pseudoeuklidische) Höhenschnittpunkt eines Dreiecks $P_1\,P_2\,P_3$ liegt auf dessen pseudoeuklidischem (euklidischem) Umkreis.*

Zum Nachweis von 3. dient der Satz vom Polkegelschnitt: *Die Pole einer Geraden g in bezug auf alle Kegelschnitte eines Büschels liegen auf einem Kegelschnitt k, der durch die Fixpunkte der vom Büschel auf g erzeugten Punktinvolution und durch die drei Nebenecken des vollständigen Grundpunktevierecks geht.* Wendet man diesen Satz auf unser Büschel $\mathfrak{B}$ und die absolute Involution $\mathfrak{J}$ an, so folgt im euklidischen Fall, dass k ein Kreis ist, der durch die Höhenfusspunkte des Dreiecks $P_1\,P_2\,P_3$ geht und daher mit dem Feuerbachkreis dieses Dreiecks identisch ist (vergleiche [3, Seite 390ff.], [8, II, Seite 14]). Als Ortskurve der Mittelpunkte der Büschelkegelschnitte enthält k auch die Mitten der sechs Strecken $P_i\,P_k$ $(i \neq k)$, und daher geht k durch die zentrische Ähnlichkeit $(P_4; 2:1)$ in den Umkreis c^* des Dreiecks $P_1\,P_2\,P_3$ über. Der Mittelpunkt von c geht dabei in einen Punkt P über, der auf c diametral zu P_4 und ausserdem auf c^* liegt. Da c und c^* (in algebraischer Zählung) genau vier Schnittpunkte P_1, P_2, P_3, P besitzen, gilt 3.

Dieser Beweis gilt (bis auf die Bezeichnungen) auch für den entsprechenden pseudoeuklidischen Satz 3*, dessen euklidische Fassung 3'. sich nach den Überlegungen zu 2'. nun unmittelbar ergibt:

3'. *Schneiden sich eine gleichseitige Hyperbel c mit den Fernpunkten I_1^*, I_2^* und ein Kegelschnitt c^* mit der Hauptachsenrichtung $O\,I_1^*$ (und $O\,I_2^*$) in drei reellen Punkten P_i, so ist ihr vierter Schnittpunkt P der zum C-Höhenschnittpunkt Q^* des Dreiecks $P_1\,P_2\,P_3$ diametrale Punkt von c^*.*

Ist c^* in 3'. speziell ein Kreis, so folgt zusammen mit 3. (Figur 1):

3''. *Schneiden sich ein Kreis c^* und eine gleichseitige Hyperbel c in drei reellen Punkten P_i, so ist ihr vierter Schnittpunkt P sowohl der zum Höhenschnittpunkt Q des Dreiecks $P_1\,P_2\,P_3$ diametrale Hyperbelpunkt als auch der zum C-Höhenschnittpunkt Q^* dieses Dreiecks diametrale Kreispunkt.*

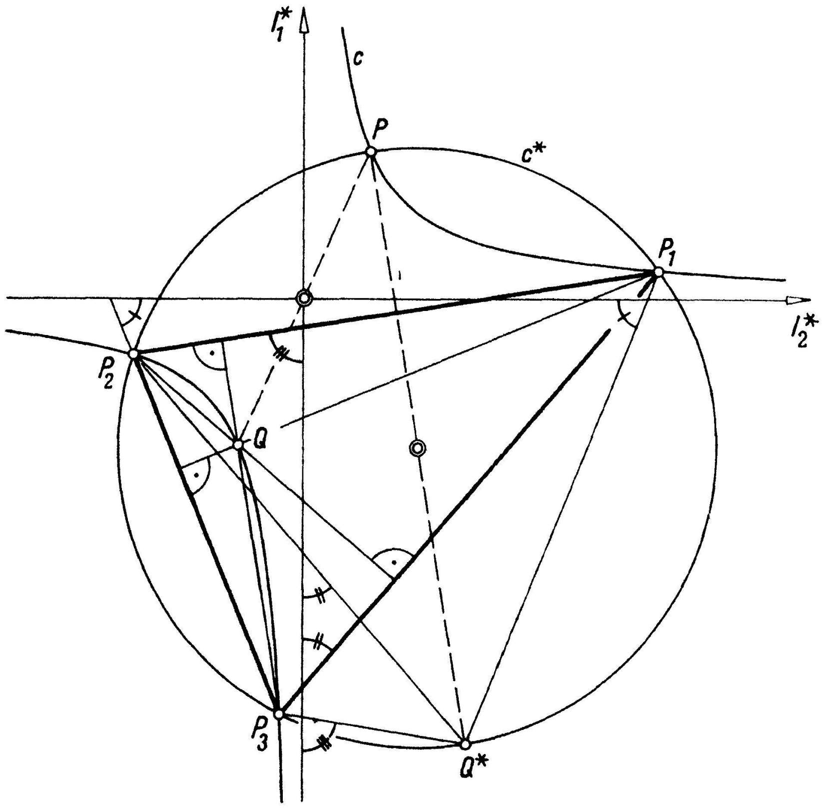
Durch 3''. wird die Sonderstellung der Hyperbel c in 3. aufgehoben; Kreis und Hyperbel erscheinen nun völlig gleichberechtigt.

Auf einen interessanten Sonderfall von 3. wurde in [1, Seite 93, Nr. 4] aufmerksam gemacht, der in [4, Seite 148] nach V. STRAZZERI benannt wurde, nach [1] aber H. BROCARD [2, Seite 127] zuzuschreiben ist:

4. *Sind P, Q diametrale Punkte einer gleichseitigen Hyperbel c, so schneidet der Kreis c^* um Q durch P die Hyperbel c in drei weiteren reellen Punkten P_i, die ein gleichseitiges Dreieck bilden.*

Der in [1] gewünschte planimetrische Beweis von 4. folgt unmittelbar aus 3.: Fällt nämlich in dem (aus topologischen Gründen reellen) Dreieck $P_1\,P_2\,P_3$ der

Höhenschnittpunkt Q mit der Umkreismitte zusammen, so ist dieses Dreieck gleichseitig.



Figur 1

Ein reelles Analogon zu 4. existiert nicht, denn eine gleichseitige Hyperbel c, deren Mittelpunkt auf einem Kreis c^* liegt und die durch den dazu diametralen Kreispunkt geht, schneidet diesen Kreis nur in zwei reellen Punkten; auch gibt es kein reelles Dreieck, das im pseudoeuklidischen Sinn gleichseitig ist, denn das C-Mittellot eines Hyperbelradius schneidet die Hyperbel in zwei konjugiert komplexen Punkten. H. SCHAAL, Stuttgart

LITERATUR

[1] Aufgaben für die Schule, Elem. d. Math. *18*, 93 (1963).
[2] BROCARD, H.: *Nouvelle Correspondance Math.* 1877.
[3] FIEDLER, W.: *Über die Büschel gleichseitiger Hyperbeln, den Feuerbach'schen Kreis und die Steiner'sche Hypocycloide.* Vierteljahresschrift d. Naturf. Ges. Zürich *30*, 390–402 (1885).
[4] FREUDENTHAL, E.: *Die Behandlung der Gleichungen 3. und 4. Grades mittels der Strazzeri-Konfiguration.* Praxis d. Math. *3*, 148–151 (1961).
[5] GIERING, O.: *Über eine Kennzeichnung der gleichseitigen Hyperbeln.* Elem. d. Math. *18*, 121–127 (1963).
[6] KLEIN, F.: *Vorlesungen über nicht-euklidische Geometrie,* bearb. v. W. ROSEMANN 1927 (Neudruck Chelsea).
[7] MÜLLER, E., und KRAMES, J.: *Vorlesungen über Darstellende Geometrie,* II. Band: *Die Zyklographie* (Wien 1929).
[8] SALMON, G., und FIEDLER, W.: *Analytische Geometrie der Kegelschnitte,* Bd. I, II, herausg. v. F. DINGELDEY (Leipzig und Berlin 1918).
[9] STEINER, J.: *Gesammelte Werke,* Bd. I, II, herausg. v. K. WEIERSTRASS (Berlin 1881, 1882).
[10] STRUBECKER, K.: *Geometrie in einer isotropen Ebene.* Math. nat. Unterr. *15*, 297–306, 343–351, 385–394 (1962/63).