

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 19 (1964)  
**Heft:** 4

**Artikel:** Eine reguläre Horozyklenüberdeckung der hyperbolischen Ebene im Poincaré-Modell  
**Autor:** Zeitler, H.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-23301>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 22.12.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik  
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts  
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrer*

Publiziert mit Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds  
zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung

---

El. Math.      Band XIX      Nr. 4      Seiten 73–96      Basel, 10. Juli 1964

---

## Eine reguläre Horozyklenüberdeckung der hyperbolischen Ebene im Poincaré-Modell

### 1. Einleitung

In neuerer Zeit werden im Rahmen der diskreten Geometrie verschiedene Lagerungs-, Überdeckungs- und andere Extremalprobleme behandelt [1]<sup>1)</sup>, [2]. Von ganz besonderem Interesse sind dabei reguläre Anordnungen. Ein System diskreter Punkte heisst regulär, wenn je zwei Punkte des Systems durch eine Bewegung so ineinander übergeführt werden können, dass dabei das ganze System mit sich selbst zur Deckung kommt.

Es ist nun besonders reizvoll, Probleme dieser Art aus dem Bereich der hyperbolischen Geometrie in verschiedenen Modellen zu untersuchen. In der vorliegenden Arbeit geht es darum, eine spezielle Horozyklenüberdeckung der hyperbolischen Ebene anzugeben. Wir verwenden dabei ein Poincaré-Modell, dessen Fundamentalkreis zu einer euklidischen Geraden (Achse) entartet ist. Dabei bestätigt sich eine Dichteabschätzung von FEJES TÓTH [3], [4]. Darüber hinaus ergibt sich ein Verfahren zur Konstruktion solcher Überdeckungen bei vorgegebener Dichte. Damit ist dann gezeigt, dass das Minimum der Abschätzung tatsächlich eintreten kann. Es gibt also keine grössere untere Grenze.

Wir setzen voraus, dass der Leser mit den Sätzen und Formeln der hyperbolischen Geometrie und mit dem genannten Poincaré-Modell vertraut ist. Bezüglich eines genaueren Studiums verweisen wir auf die Literatur ([5], [6], [7], [8]).

### 2. Konstruktion einer regulären Horozyklenüberdeckung

Die Achse des Modells teilt die euklidische Ebene. Eine Halbebene ist als Träger der Modellpunkte besonders ausgezeichnet.

Alle euklidischen Kreise, welche die Achse berühren, und alle euklidischen Geraden, welche zur Achse parallel laufen, stellen, soweit sie in der genannten ausgezeichneten Halbebene liegen, die Horozyklen des Modells dar. Die zweite Art dieser Horozyklen nennen wir entartet.

---

<sup>1)</sup> Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 77.

Als Ausgangspunkt für die Konstruktion einer Horozyklenüberdeckung wählen wir zwei spezielle, nicht entartete, sich schneidende Horozyklen  $H_1, H_2$  (Figur 1). Die beiden euklidischen Kreise  $H_1, H_2$  haben den gleichen euklidischen Radius  $r$ .

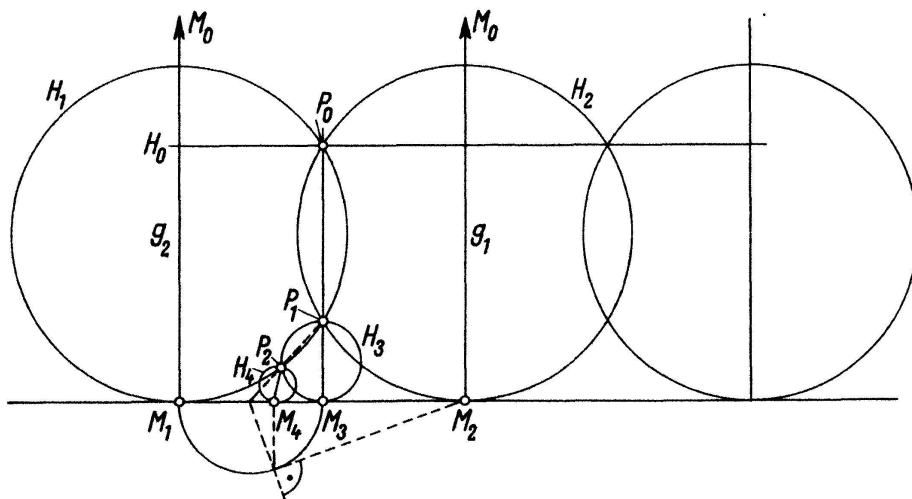
Soll der Schnittpunkt  $P_0$  von der Fläche einer dritten Horozyklenscheibe so überdeckt werden, dass (von  $P_0$  selber abgesehen) höchstens zweifache Überdeckungen von Flächenteilen vorkommen, so muss die Kurve  $H_0$  durch  $P_0$  hindurchgehen. Wir wählen für  $H_0$  einen entarteten Horozyklus.

Zur Konstruktion weiterer Horozyklen verwenden wir hyperbolische Spiegelungen.

Durch Inversion an einem Kreis um den Mittelpunkt  $M_3$  der euklidischen Strecke  $\overline{M_1 M_2}$  vom Radius  $0,5 \overline{M_1 M_2}$  entsteht aus  $H_0$  der neue Horozyklus  $H_3$  (Figur 1). Er geht durch den Schnittpunkt  $P_1$ .

Spiegeln wir dann an einem Kreis um den Mittelpunkt der euklidischen Strecke  $\overline{M_1 M_3}$  ( $\overline{M_1 M_n}$ ) vom Radius  $0,5 \overline{M_1 M_3}$  ( $0,5 \overline{M_1 M_n}$ ), so wird aus  $H_2$  ( $H_{n-1}$ ) der neue Horozyklus  $H_4$  ( $H_{n+1}$ ). Es zeigt sich, dass  $H_4$  ( $H_{n+1}$ ) durch den Punkt  $P_2$  ( $P_{n-1}$ ) geht.  $H_1$  und die Gerade  $P_{n-2} P_{n-1}$  ( $n = 2, 3, \dots$ ) gehen bei der  $(n - 1)$ -ten Inversion in sich über. (Mit  $\overline{M_1 M_2} = 2 a$  gilt  $\overline{M_3 M_k} = a (k - 3)/(k - 1)$ ,  $k = 4, 5, \dots$ ) Die Ausdrücke in den Klammern lassen erkennen, wie das Verfahren fortzusetzen ist. Auf diesem Wege wird der von der Achse und den Geraden  $g_1, g_2$  gebildete Streifen ganz mit Horozyklen ausgefüllt. Dabei sind  $g_1, g_2$  die euklidischen Senkrechten zur Achse in den Horozyklenmittelpunkten  $M_1, M_2$ . Spiegeln wir schliesslich den ganzen Streifen immer wieder an diesen Begrenzungsgeraden, so erhalten wir eine Horozyklenüberdeckung der gesamten hyperbolischen Ebene.

Nach der Art des Konstruktionsverfahrens muss es sich um eine reguläre Horozyklenanordnung handeln.



Figur 1

### 3. Der Inhalt spezieller Horozyklensektoren

In Figur 2 sind die drei Horozyklen  $H_0, H_1, H_2$  unserer Überdeckung nochmals gezeichnet. Ihre Mittelpunkte  $M_0, M_1, M_2$  bestimmen ein dreifach asymptotisches Dreieck (gestrichelt gezeichnet). Dieses Dreieck schneidet aus den drei Horozyklenscheiben Sektoren aus, deren Inhalt jetzt bestimmt werden soll. Wir verwenden zur Berechnung eine bekannte Formel. Für den Inhalt des zur Sehne  $s$  gehörigen Horo-

zyklensektors gilt nämlich:

$$F = 2 \sinh \frac{s}{2}. \tag{1}$$

Der Sektor mit den Eckpunkten  $A_0, B_0, M_0$  wurde in der Figur schraffiert gezeichnet.

Für die hyperbolische Länge  $a_0$  der hyperbolischen Strecke  $A_0 B_0$  ergibt sich mit den Bezeichnungen der Figur:

$$a_0 = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \cos \varphi_0}{1 - \cos \varphi_0} : \frac{1 + \cos(\pi - \varphi_0)}{1 - \cos(\pi - \varphi_0)} = \ln \frac{1 + \cos \varphi_0}{1 - \cos \varphi_0}.$$

Daraus folgt:

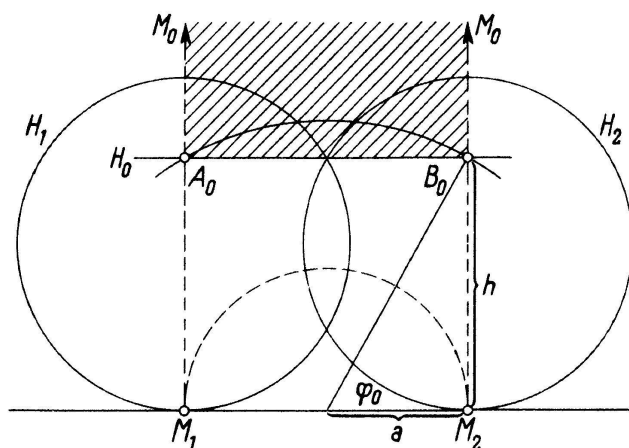
$$e^{a_0/2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \varphi_0}{1 - \cos \varphi_0}}$$

und schliesslich:

$$\sinh \frac{a_0}{2} = \frac{e^{a_0/2} - e^{-a_0/2}}{2} = \cot \varphi_0. \tag{2}$$

Damit erhalten wir mit den Bezeichnungen der Figur nach (1) als Inhalt des ersten Horozyklensektors:

$$F_0 = 2 \sinh \frac{a_0}{2} = 2 \cot \varphi_0 = 2 \frac{a}{h}. \tag{3}$$



Figur 2

Zur Bestimmung des Inhalts  $F_1 = F_2$  der beiden anderen Horozyklensektoren führen wir eine Inversion an einem Kreis um  $M_1$  mit dem Radius  $M_1 A_1 = 2 r$  durch (Figur 3). Aus  $H_1$  wird dabei eine euklidische Gerade durch  $A_1$  parallel zur Achse, aus dem euklidischen Kreis durch  $M_1 B_1 M_2$  eine euklidische Gerade senkrecht zur Achse durch den Bildpunkt  $\overline{B_1}$  von  $B_1$ . Die euklidische Gerade durch  $M_1 A_1$  geht in sich über. Nach den Gesetzen der Inversion gilt für die Länge der euklidischen Strecke  $A_1 \overline{B_1}$ :

$$\overline{A_1 B_1} \cdot 2 a = 4 r^2.$$

also weiter:

$$\overline{A_1 B_1} = \frac{2 r^2}{a}. \tag{4}$$

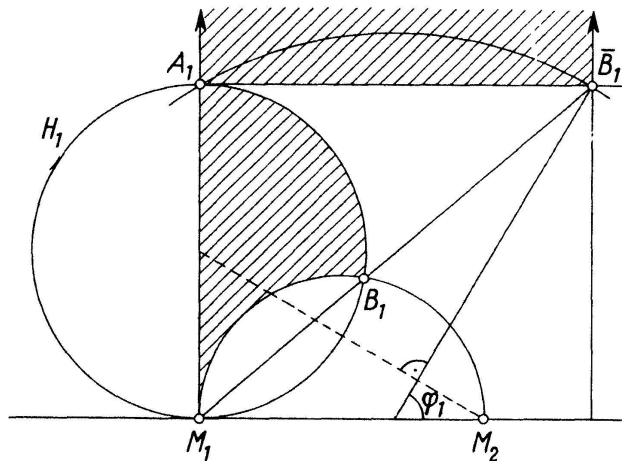
Hyperbolisch gesehen, handelt es sich um eine Spiegelung. Der fragliche Horozyklensektor mit dem Inhalt  $F_1$  geht in einen entarteten Sektor gleichen Inhalts über (beide schraffiert gezeichnet).

Ist  $a_1$  die Länge der hyperbolischen Strecke  $A_1 \overline{B_1}$ , so gilt nach (2) und (4):

$$\sinh \frac{a_1}{2} = \cot \varphi_1 = \frac{r^2}{a} : 2r = \frac{r}{2a}.$$

also mit (1):

$$F_1 = F_2 = 2 \sinh \frac{a_1}{2} = 2 \cot \varphi_1 = \frac{r}{a}. \quad (5)$$



Figur 3

#### 4. Die Überdeckungsdichte

Aus Gründen der Regularität genügt es, die Überdeckungsdichte  $d$  lediglich im Bereich des asymptotischen Dreiecks  $M_0 M_1 M_2$  zu bestimmen. Dort gilt:

$$d = \frac{F_1 + F_2 + F_0}{F}. \quad (6)$$

Dabei sind  $F_1, F_2, F_0$  die im letzten Abschnitt berechneten Inhaltsmasszahlen,  $F$  der Inhalt des Dreiecks  $M_0 M_1 M_2$ . Letzterer hat bekanntlich den Wert  $\pi$ . Für die Überdeckungsdichte im asymptotischen Dreieck und damit in der ganzen hyperbolischen Ebene erhalten wir also mit (3) und (5):

$$d = \frac{2 \frac{r}{a} + 2 \frac{a}{h}}{\pi}.$$

Wegen

$$(h - r)^2 + a^2 = r^2 \quad \text{oder} \quad \frac{r}{a} = \frac{\left(\frac{h}{a}\right)^2 + 1}{2 \frac{h}{a}}$$

können wir mit  $h/a = \lambda$  schreiben:

$$d = \frac{1}{\pi} \frac{3 + \lambda^2}{\lambda}. \quad (7)$$

Eine genaue Untersuchung dieser Funktion zeigt, dass an der Stelle  $\lambda = \sqrt{3}$  das Dichteminimum  $\sqrt{12}/\pi$  vorliegt. Damit bestätigt sich die von FEJES TÓTH angegebene Abschätzung:

$$d \geq \frac{\sqrt{12}}{\pi}.$$

Ist  $d$  gegeben, so errechnet sich aus (7) sofort ein bestimmter Wert für  $\lambda$ . Damit aber können die drei speziellen Horozyklen  $H_0, H_1, H_2$  und davon ausgehend die gesamte Überdeckung der hyperbolischen Ebene konstruiert werden.

Für  $\lambda < 1$  und  $\lambda > 2 + \sqrt{3}$  führt diese Konstruktion auf eine mehr als zweifache Überdeckung. Beschränken wir uns auf zweifache Überdeckungen, so erhalten wir für die Dichte unserer Horozyklenanordnung die Abschätzung:

$$d \leq \frac{8 - 2\sqrt{3}}{\pi}.$$

H. ZEITLER, Weiden (Oberpf.), Deutschland

#### LITERATURVERZEICHNIS

- [1] FEJES TÓTH, *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum* (Springer-Verlag, Berlin 1953).
- [2] FEJES TÓTH, *Neuere Ergebnisse in der diskreten Geometrie*, *El. Math.* 15, 25–36 (1960).
- [3] FEJES TÓTH, *Kreisüberdeckungen der hyperbolischen Ebene*, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* 4, 111–114 (1953).
- [4] FEJES TÓTH, *Über die dünnste Horozyklenüberdeckung*, *Acta Math. Acad. Sci. Hung.* 7, 95–98 (1956).
- [5] O. PERRON, *Nichteuklidische Elementargeometrie der Ebene* (Teubner-Verlag, Stuttgart 1962).
- [6] K. FLADT, *Elementargeometrie III* (Klett-Verlag, Stuttgart 1961).
- [7] H. MESCHKOWSKI, *Nichteuklidische Geometrie* (Vieweg-Verlag, Braunschweig 1954).
- [8] F. GONSETH, P. MARTI, *Leitfaden der Planimetrie*, Teil II (Orell-Füssli-Verlag, Zürich 1953).

## Herleitung der hyperbolischen Trigonometrie aus dem allgemeinen Poincarémodell

Den folgenden Betrachtungen soll das allgemeine<sup>1)</sup> Poincarémodell für die hyperbolische Geometrie zugrundegelegt werden. Das Innere des sogenannten Fundamentalkreises sei die hyperbolische Ebene. Die im Innern dieses Fundamentalkreises befindlichen Bögen der zu diesem Kreis gehörigen orthogonalen Kreise stellen bekanntlich die hyperbolischen Geraden dieses Modells dar. Im folgenden soll nun für ein allgemeines Dreieck ohne Umweg über das rechtwinklige Dreieck die hyperbolische Trigonometrie abgeleitet werden. Insbesondere werden hergeleitet: Sinussatz, Seitencosinussatz und Winkelcosinussatz. Die Herleitung dieser Sätze gelingt relativ einfach durch Wahl eines günstig gelegenen Dreiecks mit Hilfe einer einzigen Figur.

<sup>1)</sup> Eine Herleitung für das spezielle Poincarémodell, bei dem die hyperbolischen Geraden durch auf einer Fundamentalgeraden senkrechte Halbkreise realisiert sind, hat der Verfasser in *MNU 16*, 311–314 (1963) gegeben.