Sur les nombres pseudopremiers triangulaires

Autor(en): **Rotkiewicz, A.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **19 (1964)**

Heft 4

PDF erstellt am: **14.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-23303

Sur les nombres pseudopremiers triangulaires

Théorème : *Il existe une infinité des nombres triangulaires qui sont pseudopremiers.*

Lemme : *Si n est un nombre naturel tel que*

$$n(2n-1) \mid 2^{n-1}-1 \quad \text{et} \quad 3 \nmid n(2n-1)\,, \tag{1}$$

alors pour $M = (2^{2n-1}+1)/3$, on a

$$M(2M-1) \mid 2^{M-1}-1 \quad \text{et} \quad 3 \nmid M(2M-1)\,. \tag{2}$$

Démonstration du lemme. Supposons qu'on a les formules (1). Soit $M = (2^{2n-1}+1)/3$. On a alors $2M-1 = (2^{2n}-1)/3$, $M-1 = 2(2^{2(n-1)}-1)/3$ et d'après (1) on a $2n(2n-1) \mid M-1$, d'où on trouve

$$M = \frac{(2^{2n-1}+1)}{3} \,\Big|\, (2^{2n-1}+1)(2^{2n-1}-1) \,\Big|\, 2^{2n(2n-1)}-1 \,\Big|\, 2^{M-1}-1 \tag{3}$$

et

$$2M-1 = \frac{(2^{2n}-1)}{3} \,\Big|\, 2^{2n(2n-1)}-1 \,\Big|\, 2^{M-1}-1\,. \tag{4}$$

Comme $(M, 2M-1) = 1$, il résulte de (3) et (4) que $M(2M-1) \mid 2^{M-1}-1$.

D'après $3 \nmid 2n-1$ on a $2n-1 = 6k+r$, où k est un entier $\geqslant 0$ et $r = 1$ ou 5, d'où il résulte que $2^{2n-1}+1 = 2^{6k+r}+1 \equiv 2^r+1 \not\equiv 0 \pmod 9$, d'où: $3 \nmid (2^{2n-1}+1)/3 = M$. Pareillement, vu que $3 \nmid 2n$, on a $2n = 6u+r$, où u est un entier $\geqslant 0$ et $r = 2$ ou 4, d'où $2^{2n}-1 = 2^{6u+r}-1 \equiv 2^r-1 \not\equiv 0 \pmod 9$, d'où $3 \nmid (2^{2n}-1)/3 = 2M-1$. On a donc $3 \nmid M(2M-1)$ et le lemme se trouve démontré.

Démonstration du théorème. Pour $n = 37$ on a $n(2n-1) \mid 2^{n-1}-1$ et $3 \nmid n(2n-1)$, puisque $37 \mid 2^{36}-1$, $2n-1 = 73 \mid 2^9-1 \mid 2^{36}-1$. Comme $M = (2^{2n-1}+1)/3 > n$ pour $n > 1$, il résulte de notre lemme que de tout nombre naturel $n > 1$ satisfaisant aux conditions (1) on peut obtenir un plus grand nombre naturel n satisfaisant aux mêmes conditions. Il existe donc une infinité de nombres naturels n, tels que $n(2n-1) \mid 2^{n-1}-1$. Mais alors on a

$$t_{2n-1} = \frac{(2n-1)\,2n}{2} =$$

$$= n(2n-1) \,\Big|\, 2^{n-1}-1 \,\Big|\, 2^{(n-1)(2n+1)}-1 \,\Big|\, 2^{n(2n-1)-1}-1 \,\Big|\, 2^{n(2n-1)}-2 = 2^{t_{2n-1}}-2\,,$$

ce qui prouve que le nombre triangulaire t_{2n-1} est pseudopremier. Notre théorème est ainsi démontré.

Il est facile à vérifier que le plus petit nombre pseudopremier qui est triangulaire est le nombre $t_{33} = 561 = 3 \cdot 11 \cdot 17$.

Il est à remarquer qu'il existe des nombres pseudopremiers carrés. Deux tels nombres sont 1093^2 et 3511^2. On ne sait pas s'il en existe une infinité.

Or, on peut démontrer qu'il existe une infinité des nombres pseudopremiers divisibles par 1093^2, respectivement par 3511^2 *).

A. ROTKIEWICZ (Varsovie)

Kleine Mitteilungen

Über ein Tetraederproblem

In Aufgabe 458 der «Elemente» [1] [1]) ist gezeigt worden, dass die Summe der Quadrate der Kantenprojektionen auf eine Ebene dann und nur dann von der Lage der Ebene nicht abhängt, wenn das Tetraeder regulär ist. In dieser Arbeit behandeln wir für den Fall der Nichtregularität das allgemeine Problem der Abhängigkeit von der Lage der Ebene.

Wir verlegen eine Ecke des Tetraeders in den Nullpunkt $\mathfrak{o}$ des der Betrachtung zugrunde liegenden Koordinatensystems, auf den wir auch die vorkommenden Vektoren beziehen. $\mathfrak{p}^{(1)}$, $\mathfrak{p}^{(2)}$, $\mathfrak{p}^{(3)}$ seien die drei anderen Ecken des Tetraeders, genauer ihre auf $\mathfrak{o}$ bezogenen Ortsvektoren. Die Projektionsebene $\mathfrak{E}$ denken wir uns durch $\mathfrak{o}$ gelegt, sie ist durch ihren Stellungsvektor $\mathfrak{x}$ charakterisiert, der zugleich ein Einheitsvektor ist, so dass

$$\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \,.$$

Ist nun $\mathfrak{a}$ ein beliebiger Vektor mit der Länge $a = |\mathfrak{a}|$, q die Länge der Projektion von $\mathfrak{a}$ auf $\mathfrak{E}$ und f die Länge der Projektion von $\mathfrak{a}$ auf $\mathfrak{x}$, so ist

$$q^2 = a^2 - f^2, \quad f^2 = \langle \mathfrak{a}\,\mathfrak{x}\rangle^2,$$

wo $\langle \mathfrak{a}\,\mathfrak{x}\rangle$ das innere Produkt der beiden Vektoren $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{x}$ bedeutet; somit ist

$$q^2 = a^2 - \langle \mathfrak{a}\,\mathfrak{x}\rangle^2 \tag{1}$$

Wenden wir diese Formel auf die Tetraederkanten an, die durch die Vektoren $\mathfrak{p}^{(1)}$, $\mathfrak{p}^{(2)}$, $\mathfrak{p}^{(3)}$, $\mathfrak{p}^{(1)} - \mathfrak{p}^{(2)}$, $\mathfrak{p}^{(2)} - \mathfrak{p}^{(3)}$, $\mathfrak{p}^{(1)} - \mathfrak{p}^{(3)}$ gegeben sind, und bezeichnen mit $S(\mathfrak{x})$ die Quadratsumme der Kantenprojektionen auf $\mathfrak{E}$, die ja eine Funktion des Stellungsvektors $\mathfrak{x}$ ist, mit K die Summe der Kantenquadrate, so ist

$$S(\mathfrak{x}) = K - \sum_{\lambda} \langle \mathfrak{p}^{(\lambda)}\,\mathfrak{x}\rangle^2 - \sum_{\mu<\nu} \langle (\mathfrak{p}^{(\mu)} - \mathfrak{p}^{(\nu)})\,\mathfrak{x}\rangle^2, \quad \lambda, \mu, \nu = 1, 2, 3\,. \tag{2}$$

Für $S(\mathfrak{x})$ gilt

$$0 < S(\mathfrak{x}) < K\,.$$

$S(\mathfrak{x})$ ist eine Funktion von x_1, x_2, x_3 mit der Bedingung $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1 = 0$.

*) Voir, par exemple, A. ROTKIEWICZ: *Sur les nombres composés tels que* $n \mid 2^n - 2$ et $n \nmid 3^n - 3$, Bulletin de la Société des mathématiciens et physiciens de la R. S. de Serbie XV, Beograd 1963, p. 7–11.

[1]) Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 87.