Ein Axiomensystem für die euklidische Geometrie

Autor(en): **Guggenheimer, H.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **19 (1964)**

Heft 6

PDF erstellt am: **10.08.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-23306

Ein Axiomensystem für die euklidische Geometrie

Die axiomatische Struktur der Algebra ist sehr viel einfacher als die der Geometrie. Daher erscheint es dem Verfasser natürlich, in der Geometrie-Vorlesung für zukünftige Mathematiklehrer ein möglichst algebraisches Axiomensystem zugrunde zu legen. Die in dieser Note gegebene Theorie der euklidischen Ebene ist vom Verfasser mehrmals in diesem Sinne verwendet worden.

Unsere Axiome sagen im wesentlichen aus, dass es nichtkollineare Punkte gibt, dass die Ebene «vollständig» ist, und dass das Pythagoräische Theorem gilt. Die Formel des Satzes von Pythagoras selbst ist nicht als Axiom brauchbar, da sie auf vielen komplizierten Definitionen (zum Beispiel «Gerade», «rechter Winkel») beruht. Daher ist sie ersetzt durch eine Relation zwischen den sechs Segmenten, welche durch vier beliebige Punkte in der Ebene gegeben werden. Die Formel, welche von L. N. M. CARNOT zum erstenmal gegeben wurde, sagt aus, dass das Volumen des Tetraeders aus den vier Punkten verschwindet.

Ein Vorteil unseres Axiomensystems ist, dass die fundamentalen Relationen nur gerade Potenzen von Längen enthalten, aber dass trotzdem gerichtete Strecken auf natürliche Weise eingeführt werden können, sogar für die Geometrie über nicht reelangeordneten Körpern. Gerichtete Strecken können kohärent nur auf einer einzelnen Geraden, nicht in der ganzen Ebene, eingeführt werden. Deshalb sollte ein Axiomensystem nicht auf diesen Begriff Bezug nehmen, falls man nicht bereit ist, eine doppelte Überlagerung der Ebene in die Elementargeometrie einzuführen. Unser Axiomensystem ist nicht geeignet, als Basis für eine Geometrie über den komplexen Zahlen zu dienen (siehe Axiom V).

Der gruppentheoretische Hintergrund unserer Behandlung ist der Folgende: Die einzige Invariante der euklidischen Geometrie ist der Abstand zweier Punkte. Zwischen den sechs Abständen vierer Punkte muss *eine* Relation bestehen. Wir zeigen, dass diese Relation sowohl die Bewegungsgruppe, wie auch die Invariante, festlegt.

Definitionen sollen mit D. i ($i = 1, 2, 3, \ldots$), Sätze durch S. i bezeichnet werden.

Axiome

K sei ein vorgegebener Körper der Charakteristik $p \neq 2$. K^2 sei die Menge aller Elemente von K, welche Quadrate sind. Punkte in der Ebene π (aufgefasst als Punktmenge) werden durch grosse, Geraden und Elemente von K durch kleine Buchstaben bezeichnet.

I. *Es gibt eine Funktion $\pi \times \pi \to K^2$, welche jedem (ungeordneten) Paar von Punkten P, Q von π eine Element $P\,Q^2 \in K^2$ zuordnet.*

II. *Zu je zwei verschiedenen Punkten P, Q und jedem $a^2 \in K^2$, $a^2 \neq 0$ gibt es wenigstens zwei verschiedene R so, dass $Q\,R^2 = a^2$ und*

$$P\,Q^4 + Q\,R^4 + R\,P^4 - 2\,P\,Q^2 \cdot Q\,R^2 - 2\,Q\,R^2 \cdot R\,P^2 - 2\,R\,P^2 \cdot P\,Q^2 = 0\;^{1)}\,.$$

III. *Es gibt drei Punkte P_1, P_2, P_3 so dass*

$$P_1\,P_2^4 + P_2\,P_3^4 + P_3\,P_1^4 - 2\,P_1\,P_2^2 \cdot P_2\,P_3^2 - 2\,P_2\,P_3^2 \cdot P_3\,P_1^2 - 2\,P_3\,P_1^2 \cdot P_1\,P_2^2 \neq 0\,.$$

---

[1]) In der Bezeichnungsweise der Elementargeometrie bedeutet das $16\,s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c) = 0$.

IV. *Für vier* (nicht notwendigerweise verschiedene) *Punkte* P_1, P_2, P_3, P_4 *gilt immer*

$$\sum P_{i_1} P_{i_2}^2 \cdot P_{i_2} P_{i_3}^2 \cdot P_{i_3} P_{i_4}^2 - \sum P_{i_1} P_{i_2}^2 \cdot P_{i_2} P_{i_3}^2 \cdot P_{i_3} P_{i_1}^2 - \sum P_{i_1} P_{i_2}^2 \cdot P_{i_3} P_{i_4}^4 = 0 .$$

(Die Summen sollen über alle Permutationen von ungeordneten Paaren ausgedehnt werden[2]).)

Die Ebene soll *quasi-reell* heissen, wenn ausserdem noch

V. $\quad P\,Q^2 = 0$ (*dann und*) *nur dann, wenn* $P = Q$

gilt. Wir behandeln nur solche Ebenen; jedoch soll bemerkt werden, dass $P\,P^2 = 0$ aus den vorhergehenden Axiomen folgt und dass verschiedene unserer Sätze auch ohne Axiom V gültig bleiben.

D.1. Drei Punkte P, Q, R sind *kollinear*, wenn für sie die Relation von Axiom II gilt. Die Gerade $\overline{P\,Q}$ ist die Menge aller Punkte, welche mit zwei nicht zusammenfallenden Punkten P, Q, kollinear sind.

D.2. *Gerichteter Abstand* $P\,Q$ ist jedes $a \in K$, für welches $a^2 = P\,Q^2$.

S.1. *Drei Punkte* P, Q, R *sind kollinear dann und nur dann, wenn die Abstände so gewählt werden können, dass* $P\,Q + Q\,R + R\,P = 0$.

Setzen wir $P\,Q^2 = p^2$, $Q\,R^2 = q^2$, $R\,P^2 = r^2$, so wird die Bedingung der Kollinearität

$$r^4 - 2\,(p^2 + q^2)\,r^2 + p^4 + q^4 - 2\,p^2\,q^2 = 0\,,$$

oder

$$r^2 = p^2 + q^2 \pm 2\,p^2\,q^2\,.$$

Daraus folgt der Satz, da wegen der Kommutativität der Multiplikation a und $-a$ die einzigen Wurzeln von a^2 sind.

Falls die Relation von Satz 1 erfüllt ist, so nennen wir die Abstände *normalisiert.* Für *normalisierte* Abstände setzen wir die Konvention $Q\,P = -\,P\,Q$ fest.

S.2. *Es seien* A *ein beliebiger Punkt der Ebene und* P, Q, R *drei kollineare Punkte, deren Abstände normalisiert seien. Dann gilt der Satz von* STEWART:

$$A\,P^2 \cdot Q\,R + A\,Q^2 \cdot R\,P + A\,R^2 \cdot P\,Q + P\,Q \cdot Q\,R \cdot R\,P = 0\,.$$

Für den Beweis benützen wir die vorher eingeführten Abkürzungen p, q, r, und $a^2 = A\,P^2$, $b^2 = A\,Q^2$, $c^2 = A\,R^2$. Die Formel von Axiom IV lautet ausgeschrieben

$$\begin{aligned}
&a^2\,p^2\,q^2 + a^2\,q^2\,r^2 + b^2\,p^2\,r^2 + b^2\,q^2\,r^2 + c^2\,p^2\,q^2 + c^2\,p^2\,r^2 \\
&+ a^2\,b^2\,q^2 + a^2\,b^2\,r^2 + a^2\,c^2\,q^2 + a^2\,c^2\,p^2 + b^2\,c^2\,p^2 + b^2\,c^2\,r^2 \\
&- a^2\,b^2\,p^2 - b^2\,c^2\,q^2 - c^2\,a^2\,r^2 - p^2\,q^2\,r^2 \\
&- a^4\,q^2 - a^2\,q^4 - b^4\,r^2 - b^2\,r^4 - c^4\,p^2 - c^2\,p^4 \\
&= a^2\,b^2\,(q^2 + r^2 - p^2) + b^2\,c^2\,(r^2 + p^2 - q^2) + c^2\,a^2\,(p^2 + q^2 - r^2) \\
&+ a^2\,q^2\,(p^2 + r^2 - q^2) + b^2\,r^2\,(p^2 + q^2 - r^2) + c^2\,p^2\,(q^2 + r^2 - p^2) \\
&- a^4\,q^2 - b^4\,r^2 - c^4\,p^2 - p^2\,q^2\,r^2
\end{aligned}$$

[2]) Die erste Summe enthält 12 Summanden, die zweite 4, und die dritte 6. $P\,Q^4$ bedeutet $(P\,Q^2)^2$.

$$= -2\,a^2\,b^2\,q\,r - 2\,a^2\,c^2\,p\,q - 2\,b^2\,c^2\,p\,r - 2\,a^2\,q^2\,p\,r - 2\,b^2\,r^2\,p\,q - 2\,c^2\,p^2\,q\,r - a^4\,q^2 - b^4\,r^2 - c^4\,p^2 - p^2\,q^2\,r^2$$

$$= -(a^2\,q + b^2\,r + c^2\,p + p\,q\,r)^2 = 0\,.$$

S.3. $P\,P = 0$.

Nach Axiom II definieren zwei Punkte immer eine Gerade. Wenn $P = Q$, so folgt aus S.1. für normalisierte Abstände $P\,P + P\,R + R\,P = 0$, also entweder $P\,P = 0$ oder $P\,P = -2\,P\,R$ für beliebiges R. Der zweite Fall wird durch Axiom II ausgeschlossen.

S.4. *Wenn P, Q, R ($P \neq R$) kollinear sind und A solcherart, dass $P\,A^2 = P\,Q^2$, $R\,A^2 = R\,Q^2$, dann ist $A = Q$.*

Von hier an verwenden wir ausgiebig die quasi-reelle Eigenschaft. Die Formel von STEWART reduziert sich hier zu $A\,Q^2 \cdot R\,P = 0$. $R \neq P$ impliziert $A = Q$.

S.5. *Wenn P, Q, R sowie P, Q, S kollinear sind und $P \neq Q$, so sind Q, R, S kollinear.*

Nach S.1. kann die Voraussetzung formuliert werden als

$$P\,Q + Q\,R + R\,P = 0\,, \qquad \pm P\,Q + Q\,S + S\,P = 0\,.$$

Ausserdem gilt der Satz von STEWART in der Form

$$S\,P^2 \cdot Q\,R + Q\,S^2 \cdot R\,P + S\,R^2 \cdot P\,Q + P\,Q \cdot Q\,R \cdot R\,P = 0\,.$$

Wird hierin $S\,P^2$ durch die zweite Kollinearitätsbedingung eliminiert, so erhält man durch eine leichte Umformung mit Hilfe der ersten Gleichung

$$P\,Q\,(S\,R^2 \pm 2\,Q\,S \cdot Q\,R - Q\,R^2 - Q\,S^2) = 0\,.$$

Da nach Voraussetzung $P\,Q \neq 0$, so folgt $S\,R = \pm\,(Q\,R \pm Q\,S)$ und die drei Punkte sind kollinear nach S.1.

Korollare: 1. Eine Gerade ist durch zwei ihrer Punkte eindeutig festgelegt.

2. Zwei verschiedene Geraden haben höchstens einen Punkt gemein.

3. In Axiom II kann «wenigstens» durch «genau» ersetzt werden.

D.3. Zwei sich in einem Punkt P schneidende Geraden g, h sind *senkrecht*, wenn $A \in g$, $B \in h$, $A \neq P$, $B \neq P$ existieren, so dass $A\,P^2 + P\,B^2 = A\,B^2$.

S.6. *Die Definition des Senkrechtstehens ist unabhängig von der Wahl der Punkte A und B.*

Es genügt, zu zeigen, dass die pythagoräische Formel für einen beliebigen Punkt $C \in h$ anstelle von B gültig bleibt. In normalisierten Abständen gilt

$$A\,P^2 \cdot B\,C + A\,B^2 \cdot C\,P + A\,C^2 \cdot P\,B + P\,B \cdot B\,C \cdot C\,P = 0\,,$$

und also, nach unseren Voraussetzungen

$$-A\,P^2 \cdot P\,B - A\,P^2 \cdot C\,P + A\,P^2 \cdot C\,P + P\,B^2 \cdot C\,P + A\,C^2 \cdot P\,B - \\ - P\,B\,(P\,B + C\,P)\,C\,P = P\,B\,(-\,A\,P^2 - P\,C^2 + A\,C^2) = 0\,.$$

Der Satz folgt aus $P\,B \neq 0$.

S.7. *Zwei Senkrechte zu einer gemeinsamen Transversalen sind entweder identisch oder disjunkt.*

Es sei $a \perp g$, $b \perp g$, $a \cap b = A$, $a \cap g = P$, $b \cap g = Q$. Dann ist $A\,Q^2 = A\,P^2 + P\,Q^2$, $A\,P^2 = A\,Q^2 + P\,Q^2$, also $2\,P\,Q^2 = 0$ und $P = Q$ nach Axiom V.

S.8. *Aus jedem Punkt P, welcher nicht auf einer gegebenen Geraden g liegt, gibt es eine Senkrechte (Lot) zu g.*

Eine Gerade enthält mindestens zwei Punkte A, B nicht verschwindenden Abstandes nach Definition. Man prüft leicht nach, dass $\overline{PX} \perp g$, falls $X \in g$ durch

$$X\,B = \frac{P\,A^2 - P\,B^2 - B\,A^2}{2\,B\,A}, \qquad A\,X = \frac{P\,B^2 - P\,A^2 - B\,A^2}{2\,B\,A}$$

gegeben ist. Nach S.4. ist X eindeutig bestimmt und unabhängig vom Vorzeichen, das für $B\,A$ gewählt wird. Nach S.7. ist das Lot eindeutig bestimmt.

D.4. Ein *Winkel* $P\,(g, h)$ ist gegeben durch zwei Geraden g, h welche sich in einem Punkt P, dem *Scheitel*, schneiden.

D.5. Zwei Winkel $P_1\,(g_1, h_1)$, $P_2\,(g_2, h_2)$ sind *kongruent*, falls es Punkte $G_i \in g_i$, $H_i \in h_i$ $(i = 1, 2)$ gibt, so dass $G_i \neq P$, $H_i \neq P$ und

$$P_1\,G_1^2 = P_2\,G_2^2, \qquad P_1\,H_1^2 = P_2\,H_2^2, \qquad G_1\,H_1^2 = G_2\,H_2^2.$$

S.9. *Die Winkelkongruenz ist unabhängig von der Wahl der Punkte G_1, G_2, H_1, H_2.*

Es genügt, zu zeigen, dass die definierenden Relationen bestehen bleiben, wenn ein Punkt aufs Mal geändert wird. Für $K_1 \in h_1$, $K_1 \neq P$, gibt es nach Axiom II und S.4. ein einziges $K_2 \in h_2$, für welches $P_1\,K_1^2 = P_2\,K_2^2$ und $H_1\,K_1^2 = H_2\,K_2^2$ gilt. Dann ist auch

$$G_1\,P_1^2 \cdot H_1\,K_1 + G_1\,H_1^2 \cdot K_1\,P_1 + G_1\,K_1^2 \cdot P_1\,H_1 + P_1\,H_1 \cdot H_1\,K_1 \cdot K_1\,P_1 = 0$$

$$G_2\,P_2^2 \cdot H_2\,K_2 + G_2\,H_2^2 \cdot K_2\,P_2 + G_2\,K_2^2 \cdot P_2\,H_2 + P_2\,H_2 \cdot H_2\,K_2 \cdot K_2\,P_2 = 0$$

und durch Subtraktion $(G_1\,K_1^2 - G_2\,K_2^2)\,K_1\,P_1 = 0$, also ergibt sich die noch fehlende Gleichung $G_1\,K_1^2 = G_2\,K_2^2$.

Korollare: 1. Winkelkongruenz ist eine Äquivalenzrelation.

2. Alle rechten Winkel sind kongruent.

3. Kongruenzsätze $s\,s\,s$ und $s\,w\,s$.

4. Die Basiswinkel im gleichschenkligen Dreieck sind kongruent.

5. $P(g, h)$ ist kongruent $P(h, g)$.

S.10. *Es seien m, n zwei Geraden, welche die Geraden eines Winkels $P\,(g, h)$ treffen, aber nicht durch P gehen. Es sei $A = g \cap m$, $B = g \cap n$, $A' = h \cap m$, $B' = h \cap n$. Wenn es normalisierte Abstände auf g und h gibt, für die*

$$P\,B = c\,P\,A \qquad P\,B' = c\,P\,A' \qquad c \in K$$

so gilt auch $B\,B'^2 = c^2\,A\,A'^2$.

Nach Voraussetzung gilt auch

$$A\,B = (c-1)\,P\,A \qquad A'\,B' = (c-1)\,P\,A'$$

und nach STEWART

$$P\,B^2 \cdot A'\,B' + B\,A'^2 \cdot B'\,P + B\,B'^2 \cdot P\,A' + P\,A' \cdot A'\,B' \cdot B'\,P = 0,$$

$$P\,A'^2 \cdot A\,B + A\,A'^2 \cdot B\,P + B\,A'^2 \cdot P\,A + P\,A \cdot A\,B \cdot B\,P = 0.$$

Nach den Voraussetzungen kann in der ersten Gleichung $P\,A'$, in der zweiten $P\,A$ vor die Klammer genommen werden. Eine einfache Elimination gibt dann

$$B\,B'^2 - c^2\,A\,A'^2 = 0\,.$$

S.11. *Es seien m, n senkrecht zur Geraden h eines Winkels $P\,(g, h)$. Der Scheitel P sei weder auf m noch auf n. Mit den Bezeichnungen von Satz 10 gilt*

$$\frac{P\,B}{P\,A} = \frac{P\,B'}{P\,A'}\,.$$

Wir setzen $P\,B = c\,P\,A$ und normalisieren die Abstände wie für den Beweis von S.10. Die zweite Stewart-Gleichung des vorhergehenden Beweises gilt auch hier und kann in die Form

$$B\,A'^2 + (c-1)\,P\,A'^2 - c\,A\,A'^2 - c\,(c-1)\,P\,A^2 = 0$$

gebracht werden. Nach Voraussetzung ist $P\,A^2 = A\,A'^2 + P\,A'^2$, daher

$$B\,A'^2 + (2\,c-1)\,P\,A'^2 - c^2\,P\,A^2 = 0\,.$$

Die erste Stewart-Gleichung des vorhergehenden Beweises kann durch diese Beziehung und $P\,B^2 = B\,B'^2 + P\,B'^2$ reduziert werden zu

$$-2\,P\,A' \cdot B'\,P\,(c\,P\,A' + B'\,P) = 0\,.$$

Der Satz folgt sofort.

S.12. *In jedem Punkt einer Geraden h existiert eine einzige Senkrechte zu h.*

Die Existenz folgt sofort aus S.11. Nehmen wir jetzt an, dass zwei Senkrechte $\overline{P\,B}$ und $\overline{Q\,B}$ durch $B \in h$ existieren. Nach II können wir $B\,Q^2 = B\,P^2 = b^2$ annehmen. Wir wählen einen zweiten Punkt $A \in h$ und setzen $A\,B^2 = a^2 \neq 0$. Dann ist

$$A\,P^2 = A\,Q^2 = a^2 + b^2\,.$$

Ausserdem sei $P\,Q^2 = x^2$. Nach IV ist

$$\begin{aligned}
&P\,Q^2 \cdot Q\,A^2 \cdot A\,B^2 + P\,Q^2 \cdot Q\,B^2 \cdot A\,B^2 + P\,Q^2 \cdot P\,A^2 \cdot A\,B^2 + P\,Q^2 \cdot P\,B^2 \cdot A\,B^2 \\
&+ P\,A^2 \cdot Q\,A^2 \cdot Q\,B^2 + P\,A^2 \cdot A\,B^2 \cdot Q\,B^2 + P\,A^2 \cdot P\,B^2 \cdot Q\,B^2 + P\,A^2 \cdot P\,Q^2 \cdot Q\,B^2 \\
&+ P\,B^2 \cdot Q\,B^2 \cdot Q\,A^2 + P\,B^2 \cdot A\,B^2 \cdot Q\,A^2 + P\,B^2 \cdot P\,Q^2 \cdot Q\,A^2 + P\,B^2 \cdot P\,A^2 \cdot Q\,A^2 \\
&- P\,B^2 \cdot Q\,B^2 \cdot P\,Q^2 - P\,B^2 \cdot A\,B^2 \cdot P\,A^2 - Q\,A^2 \cdot P\,Q^2 \cdot P\,A^2 - Q\,A^2 \cdot Q\,B^2 \cdot A\,B^2 \\
&- P\,Q^2 \cdot A\,B^4 - P\,Q^4 \cdot A\,B^2 - P\,A^4 \cdot Q\,B^2 - P\,A^2 \cdot Q\,B^4 - P\,B^2 \cdot Q\,A^4 - P\,B^4 \cdot Q\,A^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= a^2\,(a^2+b^2)\,x^2 + a^2\,b^2\,x^2 + a^2\,(a^2+b^2)\,x^2 + a^2\,b^2\,x^2 \\
&+ (a^2+b^2)^2\,b^2 + a^2\,b^2\,(a^2+b^2) + b^4\,(a^2+b^2) + b^2\,(a^2+b^2)\,x^2 \\
&+ b^4\,(a^2+b^2) + a^2\,b^2\,(a^2+b^2) + b^2\,(a^2+b^2)\,x^2 + b^2\,(a^2+b^2)^2 \\
&- b^4\,x^2 - a^2\,b^2\,(a^2+b^2) - (a^2+b^2)^2\,x^2 - a^2\,b^2\,(a^2+b^2) \\
&- a^4\,x^2 - a^2\,x^4 - b^4\,(a^2+b^2) - b^2\,(a^2+b^2)^2 - b^4\,(a^2+b^2) - b^2\,(a^2+b^2)^2
\end{aligned}$$

$$= a^2\,x^2\,(-x^2 + 4\,b^2) = 0\,.$$

Also ist entweder $x = 0$, das heisst $P = Q$, oder $x^2 = 4\,b^2$ und P, Q, B sind kollinear nach D.1.

D.6. Disjunkte Geraden heissen *parallel.*

S.13. *Zwei Geraden sind dann und nur dann parallel, wenn sie ein gemeinsames Lot besitzen.*

Der erste Teil des Satzes ist in S.7. enthalten.

Gegeben seien die Geraden g und h. Wir wählen $P \in g$ und ziehen das Lot n von P auf h. Der Schnittpunkt von n und h sei Q. Wir zeigen: Ist g nicht senkrecht zu n, so schneiden sich g und h. Es sei $R \neq P$ ein zweiter Punkt auf g, und S der Fusspunkt des Lotes von R auf n. Nach Voraussetzung ist $S \neq P$. Nach S.11. ist Q der Fusspunkt des Lotes auf n aus einem Punkt $X \in g$ definiert durch $PS/PQ = PR/PX$. Nach Konstruktion ist $X = g \cap h$.

Korollare: 1. Durch einen nicht auf einer Geraden g liegenden Punkt P existiert genau eine Parallele zu g.
2. Die Gleichung einer Geraden in kartesischen Koordinaten ist linear.
3. Parallele sind äquidistant.
4. Stufenwinkel an Parallelen sind kongruent.

Die bisher bewiesenen Sätze sind so formuliert, dass die Verifikation der Hilbertschen Axiome der Inzidenz, Kongruenz, und des Parallelismus sofort ausgeführt werden kann. Die einzige Ausnahme ist das Axiom der Winkeladdition, welches in der Hilbertschen Formulierung auf den Axiomen der Anordnung beruht. Der Grund für diese Ausnahme ist leicht einzusehen.

Nach unserer Definition ist die Eindeutigkeit der Winkeladdition gleichbedeutend damit, dass die vier Seiten und eine Diagonale eines Vierecks eindeutig das Quadrat der Länge der zweiten Diagonale bestimmen. Axiom IV führt aber auf eine biquadratische Gleichung, von deren zwei Lösungen wir die «grössere» auslesen sollen. Das ist aber nur möglich, wenn K ein *angeordneter Körper,* und daher von der Charakteristik Null, ist. In diesem Fall ist es leicht, eine Zwischen-Relation, Halbebenen, und konvexe Polygone zu definieren. Die Axiome der Anordnung und der Winkeladdition werden dann leicht zu beweisende Sätze. Hier kam es uns hauptsächlich darauf an, zu zeigen, dass ein wesentlicher Teil der metrischen euklidischen Geometrie ebenso leicht wie die projektive Geometrie über einem beliebigen Körper entwickelt werden kann.

Bemerkungen: Bei Charakteristik 2 muss die Bedingung der Kollinearität durch $PQ^2 + QR^2 + RP^2 = 0$ ersetzt werden. Parallelismus und Orthogonalität können nicht unterschieden werden, und Existenzsätze bereiten beträchtliche Schwierigkeiten.

Die Rolle der Formel von STEWART als Universalhilfsmittel wird in der elliptischen Geometrie von

$$\cos AP \sin QR + \cos AQ \sin RP + \cos AR \sin PQ = 0,$$

in der hyperbolischen Geometrie von

$$\cosh AP \sinh QR + \cosh AQ \sinh PR + \cosh AR \sinh PQ = 0$$

übernommen[3]).

H. GUGGENHEIMER, University of Minnesota
Minneapolis, Minn., USA

[3]) This research was supported by the Air Force Office of Scientific Research, United States Air Force.