Ungelöste Probleme

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **19 (1964)**

Heft 6

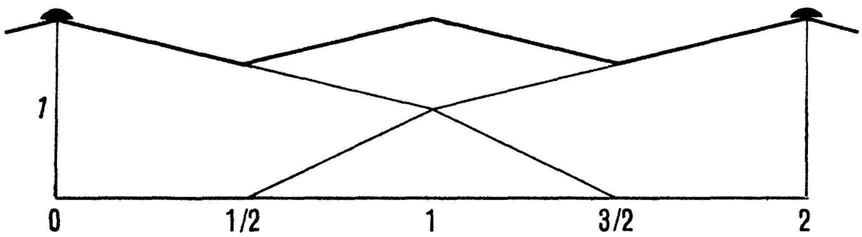
PDF erstellt am: **12.07.2024**

Ungelöste Probleme

Nr. 47. Wir wollen auf einer unendlichen Strasse Lampen errichten. Die Lampendichte d (durchschnittliche Lampenzahl pro Kilometer), sowie die Beleuchtungsfunktion $f(x)$, die die von einer Lampe herrührende Strassenbeleuchtung im Abstand x vom Lampenfusspunkt angibt, sind vorgegeben. Wir setzen voraus, dass $f(x)$ eine nicht zunehmende Funktion ist, dass die Reihe $f(1) + f(2) + \ldots$ konvergiert und dass sich die von den einzelnen Lampen stammenden Beleuchtungen additiv zusammensetzen. B sei das Infimum der Beleuchtung an der Strasse (die Beleuchtung an der am schlechtesten beleuchteten Stelle) bei einer gewissen Lampenverteilung. Gesucht wird diejenige Lampenverteilung, für die B den grösstmöglichen Wert erreicht.

L. Danzer hat zuerst bemerkt, dass die beste Verteilung nicht immer die äquidistante ist. Das folgende, einfache Beispiel stammt von A. Heppes.

Es sei $f(0) = 1, f(1) = {}^1/_2, f({}^3/_2) = f(\infty) = 0$ und zwischen diesen Werten sei $f(x)$ linear. Bei einer äquidistanten Verteilung mit der Dichte $d = {}^1/_2$ schaut die Beleuchtung so aus:



Bei einer äquidistanten Verteilung mit $d = 1$ müsste man halbwegs zwischen zwei Lampen eine neue Lampe aufstellen. Es ist aber offensichtlich günstiger, die neuen Lampen rechts (oder links) von den ursprünglichen im Abstand ${}^1/_2$ anzubringen, weil sich dadurch eine ganz gleichmässige Beleuchtung mit der festen Intensität ${}^7/_4$ ergibt.

Das Problem ist nun, eine allgemeine Kennzeichnung der möglichen Extremalfiguren anzugeben und insbesondere zu entscheiden, ob sich die beste Verteilung stets aus kongruenten, äquidistanten Punktsystemen zusammensetzen lässt.

L. Fejes Tóth

Kleine Mitteilungen

Notiz zu einem System von Grössenrelationen im Dreieck[1]

In einem *beliebigen* Dreieck werden Um- und Inkreisradius mit R bzw. r bezeichnet. Σm_i, Σw_i und Σh_i seien in dieser Reihenfolge die Summen der Längen der Schwerelinien, der Winkelhalbierenden und der Höhen. Dann gilt

$$\Sigma m_i \leqslant 4R + r \tag{1}$$

$$\Sigma w_i \leqslant 3R + 3r \tag{2}$$

$$\Sigma h_i \leqslant 2R + 5r\,. \tag{3}$$

Bei ganzzahligen, positiven Koeffizienten von R und r sind alle drei Abschätzungen *bestmöglich*, und das Gleichheitszeichen gilt jeweils nur im gleichseitigen Dreieck. Für (1) und

[1] Ausschnitt aus einem Vortrag, gehalten am 13. Dezember 1963 in der Mathematischen Vereinigung Bern, über «Grössenbeziehungen im Dreieck und verwandte Fragen (gelöste und ungelöste Probleme)».