$t_k = 1$ für alle $k \in N$ gilt $T|A$. Wir wollen Teiler dieser Art auch zu den trivialen Teilern von $A \neq 0$ zählen. In diesem Sinne sehen wir Elemente aus $\mathfrak{N}$, die nur solche trivialen Teiler besitzen, als unzerlegbare Elemente an. Offensichtlich ist $P = (p_k)_{k \in N} > 1$ aus $\mathfrak{N}$ genau dann unzerlegbar, wenn für alle $k \in N$ p_k Primzahl ist. Ein unzerlegbares Element aus $\mathfrak{N}$ braucht jedoch nicht Primelement zu sein, denn aus $P|A \cdot B$, P unzerlegbar, folgt im allgemeinen nicht $P|A$ oder $P|B$. Man wähle etwa $P = 2$, $A = (a_k)_{k \in N}$ mit $a_k = 2$ für ungerades k und $a_k = 3$ für gerades k und $B = (b_k)_{k \in N}$ mit $b_k = 3$ für ungerades k und $b_k = 2$ für gerades k.

Es gilt also nicht der ZPE-Satz.

Um den g.g.T. zweier Elemente $A, B \in \mathfrak{N}$, die nicht beide 0 sind, zu bestimmen, können wir ebenfalls auf die Komponenten von A und B zurückgreifen. Für $A = (a_k)_{k \in N}$ und $B = (b_k)_{k \in N}$ ist $D = (d_k)_{k \in N}$ mit $d_k = (a_k, b_k)$ für alle $k \in N$ g.g.T. von A und B. Sei nämlich $T|A$ und $T|B$, $T = (t_k)_{k \in N}$ aus $\mathfrak{N}$, dann gilt für alle $k \in N$ $t_k | a_k$ und $t_k | b_k$. Aus $d_k = (a_k, b_k)$ und $t_k | d_k$ für alle $k \in N$ folgt $T|D$, $D|A$ und $D|B$. Es gilt also der Satz vom g.g.T.

Verwenden wir eine Produktdefinition, die LAUGWITZ[2]) in anderem Zusammenhang benutzt, so lässt sich für alle Elemente aus $\mathfrak{N}$, die grösser als 1 sind, wenigstens eine Zerlegung in ein Produkt unzerlegbarer Elemente gewinnen. Für $P_V =_{Def.} (p_{k v_k})_{k \in N}$ mit $0 \neq V = (v_k)_{k \in N}$, P_V, $V \in \mathfrak{N}$, schreiben wir

$$Q =_{Def.} \prod_{V=M}^{N} P_V ,$$

wobei

$$Q = (q_k)_{k \in N} = \left(\prod_{m=m_k}^{n_k} p_{k m} \right)_{k \in N}$$

mit $N = (n_k)_{k \in N} > M = (m_k)_{k \in N}$ ist. Damit gilt:

Zu jedem $A = (a_k)_{k \in N} > 1$ aus $\mathfrak{N}$ existiert eine Darstellung

$$A = \prod_{V=1}^{S} P_V , \qquad \text{(I)}$$

wobei die P_V unzerlegbare Elemente sind und $S \in \mathfrak{N}$ eindeutig bestimmt ist.

Für alle $k \in N$ sei nämlich

$$a_k = \prod_{m=1}^{s_k} p_{k m}$$

die kanonische Zerlegung von a_k, dann folgt mit $P_V = (p_{k v_k})_{k \in N}$, $V = (v_k)_{k \in N}$ und eindeutig bestimmtem $S = (s_k)_{k \in N}$ die Darstellung (I). Dass die Darstellung (I) nicht nur formal sinnvoll ist, erkennt man daran, dass für alle P_V aus (I) gilt $P_V | A$, wenn für alle $k \in N$ $1 \leqq v_k \leqq s_k$. Allerdings ist Darstellung (I) im allgemeinen nicht eindeutig.

HANS-JOACHIM VOLLRATH, Darmstadt

Aufgaben

Aufgabe 465. Aus den n^2 Platznummern einer Cayleyschen Multiplikationstafel einer Gruppe der Ordnung n werden m Nummern *zufällig* (etwa durch Ziehen aus einer Urne) ausgewählt und in der Gruppentafel die entsprechenden Elemente entfernt. Den grössten Wert $k(n)$ von m, für den die Tafel aus dem Rest stets eindeutig rekonstruiert werden kann, hat kürzlich J. DÉNES bestimmt (ohne Angabe von Beispielen). Es ist $k(n) = 2n - 1$ für $n \neq 4$ und $k(4) = 3$.

[2]) LAUGWITZ, D., *Eine Einführung der δ-Funktionen*, Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss. Math.-nat. Kl. 41–59 (1959).

a) Man rekonstruiere die Tafel (E = Einselement)

E	A	B	C	D	F	G	H
A	*	*	E	*	G	*	D
B	*	*	A	*	*	*	*
C	*	*	*	*	*	*	*
D	H	G	F	*	*	*	*
F	*	*	G	*	*	*	*
G	*	*	H	E	*	*	*
H	*	*	*	*	E	*	B

b) Man streiche in der rekonstruierten Tafel $2n = 16$ Elemente so weg, dass die Tafel nicht mehr eindeutig ergänzt werden kann. E. TROST, Zürich

Lösung von a): Für die Rekonstruktion der Multiplikationstafel verwende ich nur 7 (anstelle der 12 in der Aufgabe gegebenen) Daten, nämlich:

$$FA = G, \quad HA = D, \quad BD = G, \quad CB = A, \quad CA = E, \quad DG = E, \quad FH = E.$$

Aus den letzten drei Daten folgt zunächst $AC = E$, $GD = E$, $HF = E$. Nun können wir folgendermassen weiterschliessen:

$$\left.\begin{array}{r} HA = D \Rightarrow HAC = DC = H \Rightarrow GDC = GH = C \Rightarrow GHF = \underline{CF = G}^{1)} \Rightarrow \\ ACF = AG = F \Rightarrow AGD = FD = A \end{array}\right\} \quad (1)$$

$$\left.\begin{array}{r} FA = G \Rightarrow FAC = GC = F \Rightarrow DGC = DF = C \Rightarrow DFH = CH = D \Rightarrow \\ ACH = \underline{AD = H} \Rightarrow ADG = HG = A \end{array}\right\} \quad (2)$$

$$BD = G \Rightarrow BDG = G^2 = B \Rightarrow DG^2 = DB = G \quad (3)$$

$$CB = A \Rightarrow ACB = A^2 = B \quad (4)$$

$$CB = A \Rightarrow CBD = AD \quad \text{oder} \quad \underline{CG = H} \Rightarrow ACG = AH = G \Rightarrow CAHC = CGC \quad (5)$$

oder nach (2) und (1) $HC = CGC = CF = G \Rightarrow FG = FHC = C \Rightarrow FGD = \underline{CD = F}$. Nach (2) und (5) bzw. (1), (3) und (5) ist $H^2 = ADCG = AHG = G^2 = B$, also $\underline{H^2 = B}$. Der Rest ist nicht mehr schwierig, wenn man beachtet, dass jedes Element in jeder Zeile und jeder Spalte nur einmal vorkommt. Die vollständige Tafel sieht folgendermassen aus:

E	A	B	C	D	F	G	H
A	B	C	E	F	G	H	D
B	C	E	A	G	H	D	F
C	E	A	B	H	D	F	G
D	H	G	F	B	A	E	C
F	D	H	G	C	B	A	E
G	F	D	H	E	C	B	A
H	G	F	D	A	E	C	B

P. HOHLER, Olten

Bekanntlich gibt es genau zwei nichtabelsche Gruppen der Ordnung 8: die Quaternionengruppe mit den erzeugenden Relationen $X^4 = E$, $Y^2 = X^2$, $YX = X^{-1}Y$ und die Diedergruppe D_4 mit $X^4 = Y^2 = E$, $YX = X^{-1}Y$. Die obige Gruppe ist die Quaternionengruppe, wobei

$$A = X, \quad B = X^2, \quad C = X^3, \quad D = Y, \quad F = X^3Y, \quad G = X^2Y, \quad H = XY$$

ist. Wird das rechte untere Viertelsquadrat der obigen Gruppentafel weggelassen, so gibt es also eine zweite Möglichkeit der Rekonstruktion, indem man in den in dieses Quadrat fallenden Produkten $Y^2 = E$ setzt und die Diedergruppe erhält. Eine Verifikation der Gruppenaxiome erübrigt sich bei dieser Schlussweise.

Weitere Lösungen sandten J. FRISCHKNECHT (Berneck) (nur Angabe der Gruppentafel), O. REUTTER (Ochsenhausen/BRD), J. STEINIG (Zürich).

---

1) Die unterstrichenen Relationen sind in der Aufgabe überflüssig.

Aufgabe 466. *Erweiterungen der Aufgabe 443*[1]:

a) Es gibt genau eine viergliedrige arithmetische Folge erster Ordnung, deren Glieder x, y, z, w teilerfremde natürliche Zahlen sind und einer Gleichung

$$x^n + y^n + z^n = w^n$$

mit natürlichem n genügen.

b) Man bestimme alle fünfgliedrigen arithmetischen Folgen erster Ordnung, deren Glieder x, y, z, u, v teilerfremde natürliche Zahlen sind und einer Gleichung

$$x^n + y^n + z^n = u^n + v^n$$

mit natürlichem n genügen. E. TEUFFEL, Korntal/Stuttgart

Lösung des Aufgabenstellers: a) I. Wir zeigen zunächst, dass die Differenz der arithmetischen Folge gleich 1 sein muss. Dazu setzen wir $x = y - d, z = y + d, w = y + 2\,d\ (d > 0)$ und haben

$$(y - d)^n + (y + d)^n = (y + 2\,d)^n - y^n\,, \tag{1}$$

$$2\left[y^n + \binom{n}{2} y^{n-2} d^2 + \cdots\right] = \binom{n}{1} 2\,dy^{n-1} + \binom{n}{2} (2\,d)^2 y^{n-2} + \cdots\,. \tag{2}$$

Aus (2) folgt $d \mid y^n$ und damit $d = 1$ wegen $(x, y, z, w) = 1$.

II. Wir beweisen jetzt indirekt, dass n ungerade sein muss und nehmen dazu $n = 2^s\,u$, $s \geqq 1$, mit ungeradem u an. y muss ungerade sein, denn für gerades y würde sich aus (1) mit $d = 1$ $2 \equiv 0 \pmod 4$ ergeben. Wir setzen also $y = 2\,k - 1$ und weiter zur Abkürzung

$$(2\,k + 1)^{2^s} = A_s\,, \quad (2\,k - 1)^{2^s} = B_s\,.$$

Damit wird aus (1)

$$2^n\,[(k - 1)^n + k^n] = (A_s - B_s)\,(A_s^{u-1} + A_s^{u-2}\,B_s + \cdots + B_s^{u-1})\,. \tag{3}$$

Wegen $A_s \equiv B_s \equiv 1 \pmod k$ ist nach (3)

$$2^n\,[(k - 1)^n + k^n] \equiv 2^n \equiv 0 \pmod k,$$

also $k \mid 2^n$, etwa $k = 2^\varkappa$ mit $\varkappa > 0$, denn $\varkappa = 0$ ergäbe $y = 1$, $x = 0$.

Wir betrachten jetzt die Faktoren auf der rechten Seite von (3). Jedes Glied des zweiten Faktors ist Produkt von Potenzen mit einer Basis der Form $(2^{\varkappa+1} \pm 1)^2 \equiv 1 \pmod{2^{\varkappa+2}}$. Da es u Glieder sind, ist

$$A_s^{u-1} + A_s^{u-2}\,B_s + \cdots + B_s^{u-1} \equiv u \pmod{2^{\varkappa+2}}\,. \tag{4}$$

Vom ersten Faktor beweisen wir durch vollständige Induktion, dass er die Zahl 2 genau in der $(\varkappa + s + 2)$-ten Potenz enthält, genauer

$$A_s - B_s = 2^{\varkappa+s+2}\,U_s \tag{5}$$

mit

$$U_s \equiv 1 \pmod{2^{2\varkappa+2}}\,. \tag{6}$$

Tatsächlich ist $A_1 - B_1 = 8\,k = 2^{\varkappa+3}$ und die Behauptung also richtig für $s = 1$. Sie sei bewiesen für s. Dann ist

$$A_{s+1} - B_{s+1} = (A_s + B_s)\,(A_s - B_s) = (A_s + B_s)\,2^{\varkappa+s+2}\,U_s$$

und dabei

$$A_s + B_s = 2 + 2\binom{2^s}{2} 4\,k^2 + \cdots = 2\,(1 + g\,2^{2\varkappa+2})\,, \quad g \text{ ganz}\,,$$

also

$$A_{s+1} - B_{s+1} = 2^{\varkappa+(s+1)+2}\,U_{s+1} \quad \text{mit} \quad U_{s+1} = U_s\,(1 + g\,2^{2\varkappa+2}) \equiv 1 \pmod{2^{2\varkappa+2}}\,,$$

was zu beweisen war.

---

[1]) El. Math. *18*, 139–140 (1963).

Auf der linken Seite von (3) ist

$$(k-1)^n + k^n = (2^{2\varkappa} - 2^{\varkappa+1} + 1)^{n/2} + 2^{n\varkappa} \equiv 1 \pmod{2^{\varkappa+1}}. \tag{7}$$

Vergleich der Exponenten von 2 auf der linken und rechten Seite von (3) ergibt

$$2^s u = n = \varkappa + s + 2. \tag{8}$$

Vergleich der ungeraden Faktoren ergibt nach (7), (6), (4)

$$1 \equiv 1\, u \pmod{2^{\varkappa+1}}, \quad \text{also} \quad u = 1 + a\, 2^{\varkappa+1}.$$

Wäre hier $a > 0$, also $u > 1$, so wäre

$$u - 1 = a\, 2^{2^s u - s - 1} \geqq a\, 2^{2u-2} = a\, 4^{u-1} \geqq 4^{u-1},$$

da $2^s u - s$ mit s monoton wächst. $u - 1 \geqq 4^{u-1}$ ist aber unmöglich, also gilt

$$a = 0, \quad u = 1, \tag{9}$$

und folglich wegen (8) und $\varkappa \geqq 1$

$$s \geqq 3, \quad \varkappa \geqq 3 \tag{10}$$

Dividieren wir nun in (3) beiderseits durch 2^n, so erhalten wir mit (8), (9) und (6)

$$(2^\varkappa - 1)^{\varkappa+s+2} + 2^{\varkappa(\varkappa+s+2)} = U_s\, 1 \equiv 1 \pmod{2^{2\varkappa+2}}$$

und da nach (10) $\varkappa(\varkappa + s + 2) \geqq 2\varkappa + 2$ sowie $3\varkappa > 2\varkappa + 2$, ist

$$1 \equiv (1 - 2^\varkappa)^{\varkappa+s+2} \equiv 1 - 2^s\, 2^\varkappa + 2^{s-1}(2^s - 1)\, 2^{2\varkappa} \pmod{2^{2\varkappa+2}},$$

also

$$2^{\varkappa+s} \equiv 2^{2\varkappa+s-1}(2^s - 1) \pmod{2^{2\varkappa+2}}, \quad 1 \equiv 2^{\varkappa-1}(2^s - 1) \pmod{2^{\varkappa-s+2}}.$$

Aus der letzten Kongruenz folgt, dass $\varkappa = 1$ sein muss, denn wegen (8) und (10) ist $\varkappa - s + 2 = 2^s - 2s > 0$. Dies steht im Widerspruch zu (10). Die Annahme eines geraden n ist also unmöglich.

III. Nun sei n ungerade, also offenbar $n \geqq 3$. Aus (2) ergibt sich

$$y^n + \binom{n}{2} y^{n-2} + \cdots + n\, y = n\, y^{n-1} = \cdots + n\, 2^{n-2} y + 2^{n-1}$$

und man hat $y \mid 2^{n-1}$ etwa $y = 2^\eta$ ($\eta \leqq n - 1$), sowie weiter

$$n\, y \equiv n\, 2^{n-2} y + 2^{n-1} \pmod{y^2}, \quad \text{also} \quad n \equiv n\, 2^{n-2} + 2^{n-1-\eta} \pmod{y}. \tag{11}$$

Da $y > 1$ sein muss, ist $\eta > 0$, also y gerade. Deshalb folgt aus (11)

$$1 \equiv n \equiv 2^{n-2} + 2^{n-1-\eta} \equiv 2^{n-1-\eta} \pmod 2$$

und damit $\eta = n - 1$, $y = 2^{n-1}$. Aus (11) erhalten wir jetzt $2\,n \equiv n\,y + 2 \equiv 2 \pmod{y}$, also $y = 2^{n-1} \mid 2(n-1)$. Wegen $2^{n-1} > 2(n-1)$ für $n > 3$ ist $n = 3$ und $y = 2^2$. Tatsächlich ist $3^3 + 4^3 + 5^3 = 6^3$ und damit ist der Satz bewiesen.

b) I. Die Differenz der arithmetischen Folge heisse d, dann ist

$$(z - 2d)^n + (z - d)^n + z^n = (z + d)^n + (z + 2d)^n,$$

also $d \mid z^n$ und $d = 1$ wegen $d > 0$ und $(x, y, z, u, v) = 1$.

II. Für *ungerades* n hat man

$$z^n = 2\binom{n}{1} z^{n-1}(1 + 2) + 2\binom{n}{3} z^{n-3}(1 + 2^3) + \cdots + 2(1 + 2^n).$$

Für $n = 1$ ergibt sich $z = 6$ und man erhält $4 + 5 + 6 = 7 + 8$. Für $n > 1$ ist $z^2 \mid 2(1 + 2^n)$ und das ist unmöglich, weil z gerade, also z^2 ein Vielfaches von 4 ist.

III. Bei *geradem* n hat man

$$z^{n-1} = 2\binom{n}{1} z^{n-2}(1 + 2) + 2\binom{n}{3} z^{n-4}(1 + 2^3) + \cdots + 2\binom{n}{n-1}(1 + 2^{n-1}) \tag{1}$$

1) Für $n = 2$ ergibt sich $z = 12$ und man erhält

$$10^2 + 11^2 + 12^2 = 13^2 + 14^2.$$

2) Für $n > 2$ ist $z^{n-1} > 2\,n\,z^{n-2}\,(1 + 2)$, also $z > 6\,n$ und

$$z^2 \mid 2\,n\,(1 + 2^{n-1})\,, \qquad (2)$$

also $36\,n^2 < z^2 \leqq 2\,n\,(1 + 2^{n-1})$, was für $n \leqq 8$ nicht möglich ist. Also ist $n \geqq 10$.

3) Wir setzen $z = 2^t Z$, $n = 2^s N$, $t \geqq 1$, $s \geqq 1$, Z und N ungerade. Dann ist wegen (2) $2\,t \leqq 1 + s$, also $s \geqq 2\,t - 1 \geqq t$.

Es sei nun schon bewiesen, dass $s \geqq k\,t$ $(k \geqq 1)$. Wir werden zeigen, dass daraus $s \geqq (k + 1)\,t$ folgt, so dass s grösser ist als jedes Vielfache von t. Damit ist dann bewiesen, dass es keine weiteren Lösungen gibt.

Aus (1) erhalten wir, wenn wir rechts die Reihenfolge der Summanden ändern

$$z^{n-1} = 2\binom{n}{1}(1 + 2^{n-1}) + 2\binom{n}{3}(1 + 2^{n-3})\,z^2 + \cdots$$

$$+ 2\binom{n}{2\,k+1}(1 + 2^{n-2k-1})\,z^{2k} + 2\,A\,z^{2k+2}$$

mit einer ganzen Zahl A. Nun ist bekanntlich

$$a \,\Big|\, \binom{a\,b}{c} \quad \text{für} \quad (a, c) = 1\,.$$

Somit enthält jeder der angeschriebenen Binomialkoeffizienten den Faktor 2^s. Folglich ist

$$2^{(n-1)t}\,Z^{n-1} = 2^{1+s}\,U + 2^{1+(2k+2)t}\,B$$

mit einer ungeraden Zahl U und einer ganzen Zahl B. Wäre $s < (k + 1)\,t$, so wäre

$$2^{(n-1)t-(1+s)}\,Z^{n-1} = U + 2^{(2k+2)t-s}\,B\,,$$

wo der Exponent von 2 rechts positiv wäre, nämlich $> (k + 1)\,t$. Damit müsste links der Exponent von 2 verschwinden und man hätte $1 + s = (n - 1)\,t$ und $s = (n - 1)\,t - 1 < (k + 1)\,t$, folglich

$$(n - 1)\,t \leqq (k + 1)\,t\,, \quad n - 1 \leqq k + 1\,, \quad 2^s N \leqq k + 2\,. \qquad (3)$$

Für $N = 1$, $n = 2^s \geqq 10$, $s \geqq 4$ ergäbe sich $k \geqq 14$. Wegen $s \geqq k\,t \geqq k$ folgt aber aus (3) $2^k \leqq k + 2$, was schon für $k \geqq 3$ falsch ist. Für $N > 1$, $N \geqq 3$ würde $2^k\,3 \leqq k + 2$ folgen und das ist für $k \geqq 1$ falsch. Also muss $s \geqq (k + 1)\,t$ sein und wir sind am Ziel.

Aufgabe 467. Bilden in einer Determinante die Elemente von $p + 2$ Zeilen (Spalten) je eine arithmetische Reihe p-ter Ordnung $(p \geqq 1)$, so hat die Determinante den Wert Null.

G. GÜTTLER, Frankfurt a. M.

Lösung: Transponieren oder Vertauschen von Zeilen einer Matrix A verändert $|\det A|$ nicht. Also bilden ohne Beschränkung der Annahme die ersten $p + 2$ Spalten $a_1, a_2, \ldots, a_{p+2}$ von A eine arithmetische Folge p-ter Ordnung. Man bilde die ersten Differenzen und erhält in den ersten $p + 1$ Spalten $a_1 - a_2, a_2 - a_3, \ldots, a_{p+1} - a_{p+2}$. Sodann bilde man die Differenzen dieser neuen $p + 1$ Spalten und fahre so fort. Nach p solchen Schritten stimmen nach Voraussetzung die erste und die zweite Spalte überein. Da sich bei diesen Umformungen $\det A$ nicht verändert, folgt $\det A = 0$. J. SPILKER, Freiburg i. Br.

Weitere Lösungen sandten W. JÄNICHEN (Berlin-Zehlendorf), H. MEILI (Winterthur) und O. REUTTER (Ochsenhausen, BRD).

Aufgabe 468. Es seien a_i die Längen der Seiten und w_i diejenigen der Winkelhalbierenden eines Dreiecks. Man zeige, dass stets gilt

$$16\sum_{i=1}^{3} w_i^4 \leqq 9\sum_{i=1}^{3} a_i^4$$

mit Gleichheit nur im gleichseitigen Dreieck.

J. BERKES, Szeged und A. MAKOWSKI, Warschau

1. Lösung: Ist s der halbe Dreiecksumfang, so gilt[1] $w_i^2 \leqq s\,(s - a_i)$, woraus nach Umformung

$$4\,w_3^2 \leqq (a_1 + a_2)^2 - a_3^2$$

folgt. Verwendet man die wohlbekannte Ungleichung zwischen arithmetischem und quadratischem Mittel, also $(a_1 + a_2)^2 \leqq 2\,(a_1^2 + a_2^2)$, dann erhält man

$$4\,w_3^2 \leqq 2\,(a_1^2 + a_2^2) - a_3^2\,,$$

und hieraus

$$16\,w_3^4 \leqq 4\,a_1^4 + 4\,a_2^4 + 8\,a_1^2\,a_2^2 - 4\,a_1^2\,a_3^2 - 4\,a_2^2\,a_3^2 + a_3^4\,.$$

Die Summation ergibt die gewünschte Ungleichung

$$16\sum_{i=1}^{3} w_i^4 \leqq 9\sum_{i=1}^{3} a_i^4\,.$$

Das Gleichheitszeichen gilt nur für $a_1 = a_2$ bzw. $a_2 = a_3$ und $a_1 = a_3$, das heisst $a_1 = a_2 = a_3$, also nur für das gleichseitige Dreieck. J. SCHOPP, Budapest

2nd Solution: Let a_i, m_i, w_i denote the sides, medians and interior bissectors of the triangle. The familiar relations

$$4\,m_i^2 = 2\left(a_{i-1}^2 + a_{i+1}^2\right) - a_i^2 \qquad (i = 1, 2, 3;\; a_4 = a_1)$$

yield, when squared and then added,

$$16\sum_{i=1}^{3} m_i^4 = 9\sum_{i=1}^{3} a_i^4\,.$$

Since $m_i \geqq w_i$, with equality if and only if $a_{i-1} = a_{i+1}$, we have

$$16\sum_{i=1}^{3} w_i^4 \leqq 9\sum_{i=1}^{3} a_i^4\,, \qquad \text{or} \qquad M_4(w_i) \leqq \frac{\sqrt{3}}{2}\,M_4(a_i)\,,$$

with equality in an equilateral triangle.

Further, if h_i is the altitude on a_i, we have $h_i \leqq w_i$, and therefore, by a result of MAKOWSKI[2]),

$$M_k(h_i) \leqq \frac{\sqrt{3}}{2}\,M_k(a_i) \qquad \text{for} \qquad |k| = 4\,,$$

with equality as above. J. STEINIG, Zürich

Eine weitere Lösung sandte O. REUTTER (Ochsenhausen, BRD)

Neue Aufgaben

Aufgabe 489. Jedem Punkt P einer Ellipse werden die drei von P verschiedenen Punkte P_1, P_2, P_3 zugeordnet, deren zugehörige Krümmungskreise durch P gehen. Krümmungszentrum für P_i sei K_i $(i = 1, 2, 3)$. Man zeige, dass die Flächeninhalte der Dreiecke $P_1P_2P_3$ und $K_1K_2K_3$ konstant bleiben, wenn P die Ellipse durchläuft. (Für das Dreieck $P_1P_2P_3$ ist diese Eigenschaft bekannt; siehe Enzyklopädie der Math. Wiss. III C 1, S. 75.) C. BINDSCHEDLER, Küsnacht

Aufgabe 490. Ist p_n $(n = 1, 2, \ldots)$ die Folge aller Primzahlen, dann gilt für alle reellen $x > 1$ die Ungleichung

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p_n^x} < \frac{1}{e}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}\,.$$

O. REUTTER, Ochsenhausen/BRD

---

[1]) *Siehe:* Aufgaben für die Schule, Lösung zu Nr. 3, El. Math. *17*, 45–56 (1962).

[2]) *Some Geometric Inequalities*, El. Math. *17*, 40–41 (1962).

Aufgabe 491. $\mathfrak{C}$ sei eine kubische Parabel ($y = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$) und $\mathfrak{M}\,\{g, g', \ldots\}$ die Menge der Geraden, die $\mathfrak{C}$ in drei (reellen) Punkten schneiden. Man begründe folgende *ein*eindeutige Abbildung $g \leftrightarrow g'$ von $\mathfrak{M}$ auf sich: In den Schnittpunkten von g mit $\mathfrak{C}$ werden die Tangenten an $\mathfrak{C}$ gelegt. Diese Tangenten schneiden $\mathfrak{C}$ in Punkten von g'. ($g \to g'$ gilt für *jede* Kurve 3. Ordnung. (Vgl. B. L. VAN DER WAERDEN, Algebraische Geometrie, S. 89)). Zeige ferner:

$$g_1 \| g_2 \Rightarrow g_1' \| g_2' . \tag{1}$$

$$\mathrm{DV}(g_1 g_2 g_3 g_4) = \mathrm{DV}(g_1' g_2' g_3' g_4') , \quad \mathrm{DV} = \text{Doppelverhältnis} , \tag{2}$$

W. JÄNICHEN, Berlin-Zehlendorf

Aufgabe 492. Es seien a, b, c, d natürliche Zahlen und $\varphi(a)$ die Eulersche Funktion. Man beweise unter der Voraussetzung $(b, c) = 1$ die Kongruenz

$$\sum_{d|a} \varphi\left(\frac{a}{d}\right) \binom{b\,d-1}{c\,d-1} \equiv 0 \pmod{a\,c} .$$

E. TROST, Zürich

Aufgaben für die Schule

Es wird kein Anspruch auf Originalität der Aufgaben erhoben; Autoren und Quellen werden im allgemeinen nicht genannt. Die Daten für Aufgaben aus der Darstellenden Geometrie sind durchweg so festgelegt, dass der Ursprung des Koordinatensystems in der Mitte des linken Randes eines Blattes vom Format A4 gewählt werden soll, x-Achse nach rechts, y-Achse nach vorn, z-Achse nach oben, Einheit 1 cm. Anregungen und Beiträge sind zu senden an Prof. Dr. WILLI LÜSSY, Büelrainstrasse 51, Winterthur.

1. Die graphische Darstellung von

$$2\,y^3 + x\,y^2 - 2\,x^2\,y - x^3 - 10\,y^2 - 5\,x\,y - 3\,x^2 - 4\,y + 16\,x + 48 = 0$$

besteht aus drei Geraden. Wie lauten ihre Gleichungen?

▸ $y = x + 3$; $\quad y = -x + 4$; $\quad y = -{}^1/_2\,x - 2$.

2. Es scheint nicht allgemein bekannt zu sein, dass das Pascalsche Dreieck auch zur Entwicklung der Potenz eines Binoms mit negativem ganzem Exponenten gebraucht werden kann:

```
      1 1/|
    1 2/1|
  1 3/3/1
1 4/6/4 1
```

Es ist zum Beispiel:

$$(1 - x)^{-3} = 1 + 3\,x + 6\,x^2 + 10\,x^3 + \cdots \qquad |x| < 1 .$$

3. Im regulären Neuneck $ABCDEFGHI$ mit dem Umkreisradius $r = 1$ seien folgende Bezeichnungen gewählt: $AB = x$, $AC = y$, $(AD = \sqrt{3})$, $AE = z$. Der Satz von Ptolemäus liefert

für das Viereck $ACDG$: $y\sqrt{3} + x\sqrt{3} = z\sqrt{3}$, (1)

für das Viereck $ABCD$: $x^2 + x\sqrt{3} = y^2$, (2)

für das Viereck $ABCE$: $xy + xz = y\sqrt{3}$. (3)

Aus (1) ergibt sich $x + y = z$; eliminiert man y aus (2) und (3), so findet man die «Neunecksgleichung»

$$x^3 - 3\,x + \sqrt{3} = 0 . \tag{4}$$

Für die Neuneckseite x gibt Herr H. KISSEL, Bad Dürkheim, einen erstaunlich guten Näherungswert an:

$$x \approx \frac{2\sqrt{5} + 1}{8} . \tag{5}$$

Der einfache Bau der Formel gestattet eine sehr genaue Näherungskonstruktion für das reguläre Neuneck und für einen Winkel von 40°. Der relative Fehler von (5) beträgt $+3{,}5 \cdot 10^{-5}$. Die Gleichung (4) besitzt drei reelle Wurzeln, nämlich neben der Neuneckseite x die Werte von y und $-z$!

4. Ein Polyeder besitzt genau dann ausschliesslich Dreiecksflächen, wenn für die Zahl der Flächen (f) und der Kanten (k) gilt

$$f : k = 2 : 3 .$$

▶ Die Anzahl der Polyederflächen, die von n Kanten begrenzt werden, sei f_n ($n = 3, 4, \dots, N$). Dann ist die Anzahl aller Flächen

$$f = \sum_{n=3}^{N} f_n .$$

Da an jeder Kante genau 2 Flächen angrenzen, ist die Anzahl aller Kanten

$$k = \frac{1}{2} \sum_{n=3}^{N} n f_n .$$

Folglich gilt

$$3 f = 3 \sum_{n=3}^{N} f_n \leqq \sum_{n=3}^{N} n f_n = 2 k ,$$

und Gleichheit besteht genau dann, wenn $f_4 = \cdots = f_N = 0$ ist, wenn also das Polyeder nur Dreiecksflächen besitzt.

O. Reutter, Ochsenhausen, BRD

5. Die Aufgabe Nr. 4 in Band XVIII, Seite 93, behandelte einen Satz von Brocard, und lautete, mit etwas anderen Bezeichnungen:

«P und Q seien zwei Punkte einer gleichseitigen Hyperbel, die zum Hyperbelzentrum M symmetrisch liegen. Der Kreis um Q durch P schneidet die Hyperbel in drei weiteren Punkten A_k ($k = 1, 2, 3$), die Ecken eines regulären Dreiecks sind. – Für einen eleganten planimetrischen Beweis dieses schönen Satzes wäre ich dankbar.»

Es sei zunächst an den Aufsatz von H. Schaal in Band XIX dieser Zeitschrift, Seite 53 ff, erinnert, wo dieser Satz in einen grösseren Zusammenhang gestellt wird. Dann haben die Herren E. Knup, St. Gallen und O. Reutter, Ochsenhausen, Beweise eingereicht, die sehr ähnlich sind. Beide benützen wesentlich den Satz, dass $Q A_k$ und $P A_k$ mit den Asymptoten gleiche Winkel bilden. Der Beweis von Herrn Reutter lautet:

Wird die Ebene einer zentrischen Streckung mit dem Zentrum P und dem Streckungsverhältnis 1/2 unterworfen, dann wird das Dreieck $A_1 A_2 A_3$ in das Dreieck $B_1 B_2 B_3$ abgebildet, dessen Ecken B_k die Mittelpunkte der Hyperbelsehnen $\overline{PA_k}$ sind. Der Umkreismittelpunkt Q von Dreieck $A_1 A_2 A_3$ geht in den Hyperbelmittelpunkt M über, dieser ist also Umkreismittelpunkt von Dreieck $B_1 B_2 B_3$, und es ist überdies $\overline{MP} = \overline{MB_k}$. Wegen der Ähnlichkeits-Invarianz dieser Abbildung genügt es zu zeigen, dass das Dreieck $B_1 B_2 B_3$ regulär ist.

Der Mittelpunkt B_k der Hyperbelsehne $\overline{PA_k}$ ist bekanntlich auch der Mittelpunkt des zwischen den Asymptoten gelegenen Abschnitts der Sekante PA_k. Daraus (und wegen der Orthogonalität der Asymptoten) folgt, dass MB_k und PA_k (PB_k) adjungierte Richtungen in bezug auf die Asymptoten besitzen, das heisst MB_k und PA_k (PB_k) schliessen mit den Asymptoten je gleiche Winkel ein.

α_k ($0 \leqq \alpha_k < 2\pi$) sei der positiv-orientierte Richtungswinkel von MB_k, bezogen auf die willkürlich gewählte Richtung einer Asymptoten als Nullrichtung. Wir dürfen annehmen, dass $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3$ ist, was durch geeignete Numerierung der Punkte B_k erreicht werden kann. Dann folgt aus der erwähnten Sekanteneigenschaft, dass

$$\sphericalangle\, MB_kP = k\pi - 2\alpha_k$$

ist. Wegen $\overline{MP} = \overline{MB_k}$ ist das Dreieck PMB_k gleichschenklig mit der Spitze M, also $\sphericalangle\, PMB_k = \pi - 2 \sphericalangle\, MB_kP = 4\alpha_k - (2k-1)\pi$, und damit $\sphericalangle\, B_kMB_{k+1} = \sphericalangle\, PMB_{k+1} - \sphericalangle\, PMB_k = 4(\alpha_{k+1} - \alpha_k) - 2\pi$. Andererseits ist trivialerweise $\sphericalangle\, B_kMB_{k+1} = (\alpha_{k+1} - \alpha_k)$. Aus den letzten beiden Beziehungen folgt $\sphericalangle\, B_kMB_{k+1} = 2\pi/3$, womit die Regularität des Dreiecks $B_1 B_2 B_3$ nachgewiesen ist.