Eine reguläre Horosphärenüberdeckung des hyperbolischen Raumes

Autor(en): **Zeitler, H.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **20 (1965)**

Heft 4

PDF erstellt am: **13.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-23927

ELEMENTE DER MATHEMATIK
Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts
Organ für den Verein Schweizerischer Mathematik- und Physiklehrer

Publiziert mit Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds
zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung

El. Math. Band XX Heft 4 Seiten 73–96 10. Juli 1965

Eine reguläre Horosphärenüberdeckung des hyperbolischen Raumes

1. Einleitung

Die Ebene soll mit kongruenten Kreisen völlig überdeckt werden. Für welche reguläre Kreisanordnung ergibt sich eine *dünnste* Überdeckung? Dieses Extremalproblem wurde im Bereich der hyperbolischen Geometrie von Fejes Tóth behandelt [1][1]) [2]. Es ist nun besonders reizvoll, diese Untersuchung im Poincaré-Modell durchzuführen. So lässt sich zum Beispiel im Modell eine dünnste Horozyklenüberdeckung der hyperbolischen Ebene wirklich konstruieren [3]. Der vorliegende Aufsatz beschäftigt sich mit einer Erweiterung gerade dieses Gedankens ins Dreidimensionale. Es wird eine spezielle, reguläre Horosphärenüberdeckung des hyperbolischen Raumes angegeben. Wir verwenden dabei ein Poincaré-Modell, dessen Fundamentalkugel zu einer euklidischen Ebene (Grundebene) entartet ist. In diesem Modell wird dann die Überdeckungsdichte unserer Anordnung ermittelt. Dabei erhalten wir eine Dichteabschätzung, die sich bereits bei H. S. M. Coxeter [4] und L. Fejes Tóth [5] [6] findet. Weiter liefert unsere Untersuchung ein Verfahren zur Konstruktion solcher spezieller Horosphärenüberdeckungen bei vorgegebener Dichte und zeigt schliesslich, dass für eine bestimmte Überdeckung das Abschätzungsminimum tatsächlich angenommen wird.

Wir setzen wieder voraus, dass der Leser mit den grundlegenden Sätzen der hyperbolischen Geometrie und mit dem genannten Poincaré-Modell vertraut ist. Bezüglich eines genaueren Studiums verweisen wir erneut auf die in [3] angegebene Literatur.

2. Die Konstruktion einer regulären Horosphärenüberdeckung

Die Grundebene des Modells teilt den euklidischen Raum. Die eine Hälfte ist als Träger der Modellpunkte besonders ausgezeichnet.

Alle euklidischen Kugeln, welche die Grundebene berühren und alle euklidischen Ebenen, welche zur Grundebene parallel laufen, stellen die Horosphären des Modells dar (soweit sie in der genannten ausgezeichneten Hälfte des euklidischen Raumes liegen). Die zweite Art solcher Horosphären nennen wir entartet.

[1]) Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 79.

Als Ausgangspunkt für unsere Konstruktion wählen wir drei spezielle, nicht entartete, sich in einem Punkt P_0 (einen zweiten, tiefer gelegenen Schnittpunkt nennen wir P_1) schneidende Horosphären H_1, H_2, H_3. Ihre hyperbolischen Mittelpunkte M_1, M_2, M_3 bilden ein gleichseitiges euklidisches Dreieck. Die drei euklidischen Kugeln H_1, H_2, H_3 haben gleichen Radius r. Eine vierte Horosphäre H_0 ist entartet und enthält ebenfalls den Punkt P_0. Figur 1 zeigt diese Konfiguration im Grundriss (ohne H_0). Schneiden wir mit einer Ebene durch M_3, P_0, P_1 so entsteht Figur 2. Dem schraffierten Dreieck entnehmen wir mit $M_2M_1 = 2\,a$ und $M_4P_0 = h$:

$$(h - r)^2 + \left(\frac{2}{3}\,a\sqrt{3}\right)^2 = r^2$$

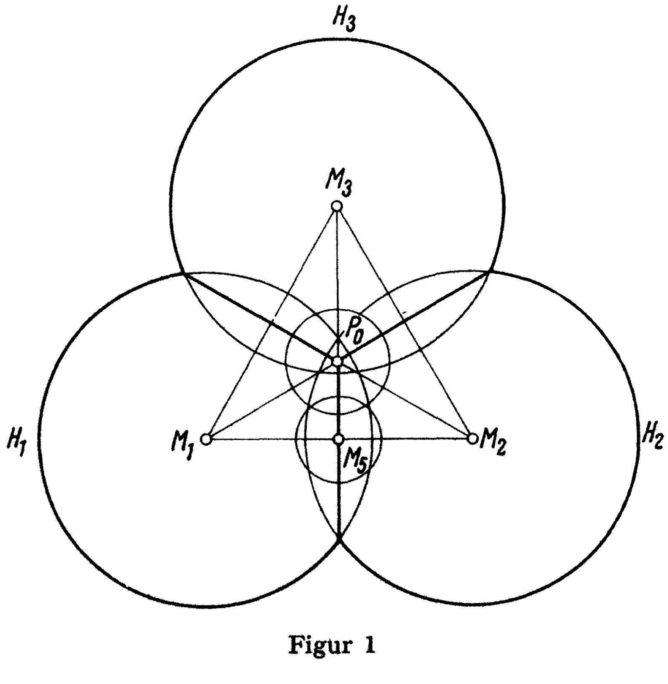
oder

$$\frac{r}{a} = \frac{(h/a)^2 + (4/3)}{2\,(h/a)}\,. \qquad (1)$$

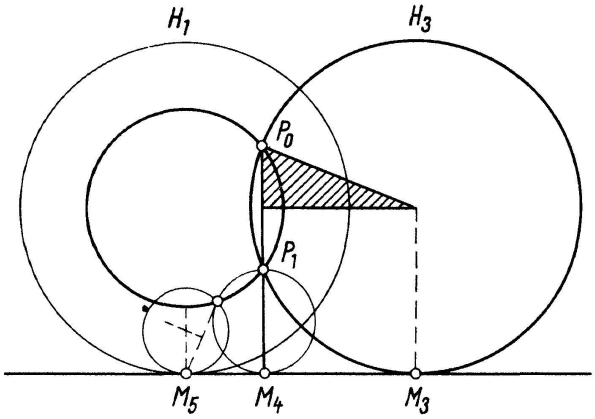
Zur Auffindung weiterer Horosphären verwenden wir hyperbolische Spiegelungen. Wir beschränken uns hier darauf, das Konstruktionsverfahren in zwei Fällen vorzuführen.

Der Umkreis des euklidischen Dreiecks $M_1M_2M_3$ (Kreismittelpunkt $S_1 = M_4$) ist Äquator der ersten Inversionskugel. Die euklidische Gerade P_0S_1 enthält den, bereits erwähnten, Punkt P_1. Bei dieser Spiegelung bleiben die Horosphären H_1, H_2, H_3 liegen, aus H_0 wird eine neue Horosphäre H_4 mit dem Mittelpunkt M_4. Neben P_1 hat H_4 mit je zwei der Horosphären H_1, H_2, H_3 noch einen weiteren Punkt gemeinsam, etwa mit H_1, H_2 den Punkt P_2.

Der Umkreis des euklidischen Dreiecks $M_1M_2M_4$ (Kreismittelpunkt S_2) ist Äquator einer zweiten Inversionskugel. Die euklidische Gerade P_1S_2 enthält den genannten Punkt P_2. Bei dieser Spiegelung bleiben die Horosphären H_1, H_2, H_4 liegen; aus H_3 wird eine neue Horosphäre H_5 mit dem Mittelpunkt M_5. Dieser Punkt M_5 ist Mittelpunkt der euklidischen Strecke M_1M_2. Die Figuren 1 und 2 zeigen die Horosphären H_4 und H_5 in Grund- und Aufriss.



Figur 1



Figur 2

Durch weitere Inversionen an Kugeln, bei denen der Äquator Umkreis eines euklidischen Dreiecks ($M_1M_4M_5$, $M_2M_4M_3$, ...) ist, ergeben sich neue Horosphären. Auf diesem Wege fortschreitend ist es möglich, das gerade euklidische Prisma mit der Grundfläche $M_1M_2M_3$ völlig mit Horosphären auszufüllen. Durch Aneinanderfügen solcher Prismen erhalten wir schliesslich eine Horosphärenüberdeckung des gesamten hyperbolischen Raumes. Nach der Art der Konstruktion muss es sich um eine ***reguläre*** Horosphärenanordnung handeln.

3. Inhaltsberechnungen

Die Horosphärenmittelpunkte M_1, M_2, M_3 und M_0 bestimmen ein vierfach asymptotisches, reguläres Tetraeder mit der Inhaltsmasszahl T. Dieses Tetraeder schneidet aus den vier Horosphärenkörpern H_0, H_1, H_2 und H_3 je einen Teilkörper. Die Inhaltsmasszahlen dieser Körper nennen wir V_0, V_1, V_2 und V_3. Aufgabe dieses Abschnitts ist es, die genannten fünf Masszahlen zu bestimmen.

a) Die Masszahl T

Nach LIEBMANN ([7], Seite 66) gilt:

$$T = 6\int_0^\infty \frac{x \sin(2\pi/3)}{e^{2x} + e^{-2x} - 2\cos(2\pi/3)}\,dx\,.$$

Substitution $z = 2x$ ergibt:

$$T = \frac{3}{4}\sqrt{3}\int_0^\infty \frac{z}{e^z + e^{-z} + 1}\,dz\,.$$

Der Integrand wird in eine Reihe folgender Form entwickelt:

$$z\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, e^{-nz}\,.$$

Durch Vergleich werden die Koeffizienten ermittelt. Wir erhalten:

$$\frac{z}{e^z + e^{-z} + 1} = z\sum_{k=0}^{\infty}\left(e^{-(1+3k)z} - e^{-(2+3k)z}\right)\,.$$

Wegen gleichmässiger Konvergenz darf gliedweise integriert werden. Die dann auftretenden Integrale der Form

$$\int_0^\infty x\, e^{-\lambda x}\, dx$$

werden durch partielle Integration ausgewertet. Es ergibt sich:

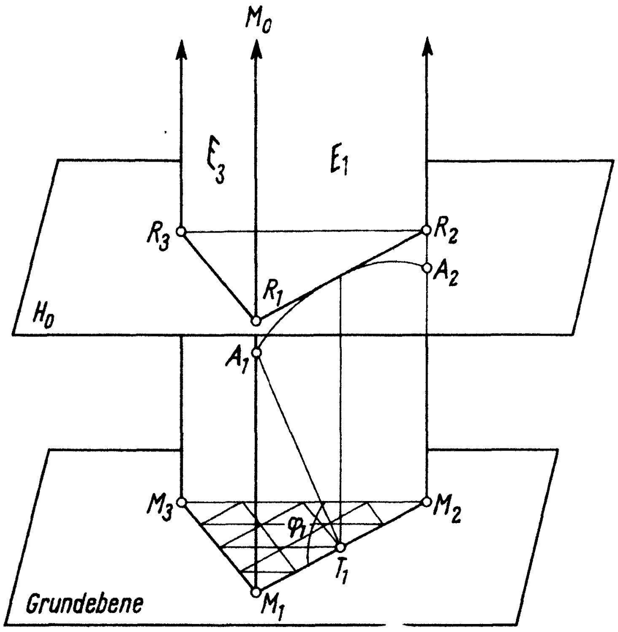
$$\int_0^\infty x\, e^{-\lambda x}\, dx = \lambda^{-2}\,.$$

Damit erhalten wir schliesslich eine Formel, die bereits H. S. M. COXETER [8] auf anderem Wege gefunden hat:

$$T = \frac{3}{4}\sqrt{3}\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} - \cdots\right) = \frac{3}{4}\sqrt{3}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{(1+3\,k)^2} - \frac{1}{(2+3\,k)^2}\right). \tag{2}$$

b) Die Masszahl V_0

Euklidisch gesprochen stellt der jetzt zu berechnende Körper ein gerades Prisma dar, das sich ins Unendliche erstreckt und dessen Grundfläche das gleichseitige Drei-



Figur 3

eck $R_1R_2R_3$ ist (Figur 3). Nach LIEBMANN ([7], Seite 152) gilt für das hyperbolische Volumen eines solchen Körpers:

$$V_0 = \frac{1}{2}\,F\,. \tag{3}$$

F ist dabei die *hyperbolische* Flächenmasszahl des *euklidischen* Dreiecks $R_1R_2R_3$. Zur Bestimmung dieser Masszahl F zeichnen wir in einer Seitenfläche des Prismas, etwa in E_1, einen Kreis um den Mittelpunkt T_1 der euklidischen Strecke M_1M_2 mit dem Radius h (Figur 3). Die beiden dabei entstehenden Punkte A_1, A_2 bestimmen eine hyperbolische Strecke von der hyperbolischen Länge a_1. Es gilt bekanntlich:

$$a_1 = \ln\frac{1+\cos\varphi_1}{1-\cos\varphi_1} \quad \text{oder} \quad \tanh\frac{a_1}{2} = \cos\varphi_1 = \frac{a}{h}\,. \tag{4}$$

Die euklidische Strecke $M_1 M_2$ wird jetzt fortgesetzt halbiert. So erhalten wir etwa den Punkt T_n mit $M_1 T_n = x_n = a/2^{n-1}$. Durch Konstruktion eines Kreises um T_n vom Radius h ergibt sich wieder eine hyperbolische Strecke. Analog zu (4) erhalten wir für ihre hyperbolische Länge a_n:

$$a_n = \ln \frac{1 + \cos\varphi_n}{1 - \cos\varphi_n} \quad \text{oder} \quad \tanh\frac{a_n}{2} = \cos\varphi_n = \frac{x_n}{h} = \frac{a}{2^{n-1} h}.$$

Daraus mit (4):

$$\tanh\frac{a_n}{2} = \frac{1}{2^{n-1}} \tanh\frac{a_1}{2}. \tag{5}$$

Genau so verfahren wir in den Ebenen E_2 und E_3. Zu den beiden Punkten A_1, A_2 erhalten wir auf diesem Wege einen dritten Punkt A_3. Diese drei Punkte bestimmen ein gleichseitiges hyperbolisches Dreieck mit der Seite a_1. Seine Fläche stellt eine erste Näherung für die gesuchte Masszahl F dar.

Wir fügen jetzt 4^{n-1} gleichseitige hyperbolische Dreiecke mit der Seite a_n und der Einzelfläche F_Δ derart aneinander, dass ihre Grundrisse das euklidische Dreieck $M_1 M_2 M_3$ so ausfüllen wie es in Figur 3 für $n = 3$ eingezeichnet ist. Die Gesamtfläche F_n dieser Dreiecke stellt eine bessere Näherung für die Masszahl F dar. Es gilt:

$$F_n = 4^{n-1} F_\Delta = 4^{n-1} (\pi - 3\,\alpha_n).$$

Dabei ist α_n ein Winkel eines einzelnen gleichseitigen Teildreiecks. Wir formen um mit der Abkürzung $A = (\pi - 3\,\alpha_n)/\sin(\pi - 3\,\alpha_n)$:

$$F_n = 4^{n-1} A \sin(\pi - 3\,\alpha_n) = 4^{n-1} A \sin\alpha_n \, (4\cos^2\alpha_n - 1).$$

Eines unserer Teildreiecke wird durch eine Höhe in zwei rechtwinklige Dreiecke zerlegt. In einem solchen rechtwinkligen Dreieck gilt (Nepersche Regel):

$$\cos\alpha_n = \coth a_n \tanh\frac{a_n}{2}.$$

Mit einem Additionstheorem für Hyperbelfunktionen erhalten wir daraus:

$$\cos\alpha_n = \frac{1}{2}\left(1 + \tanh^2\frac{a_n}{2}\right).$$

Jetzt ergibt sich:

$$F_n = 4^{n-1} A \sin\alpha_n \left\{2\tanh^2\frac{a_n}{2} + \tanh^4\frac{a_n}{2}\right\},$$

mit (5) weiter:

$$F_n = A \sin\alpha_n \left\{2\tanh^2\frac{a_1}{2} + \frac{\tanh^4(a_1/2)}{4^{n-1}}\right\}.$$

Für $n \to \infty$ geht A nach 1, α_n wird $\pi/3$ und wir bekommen schliesslich:

$$\lim_{n\to\infty} F_n = \sqrt{3}\,\tanh^2\frac{a_1}{2}.$$

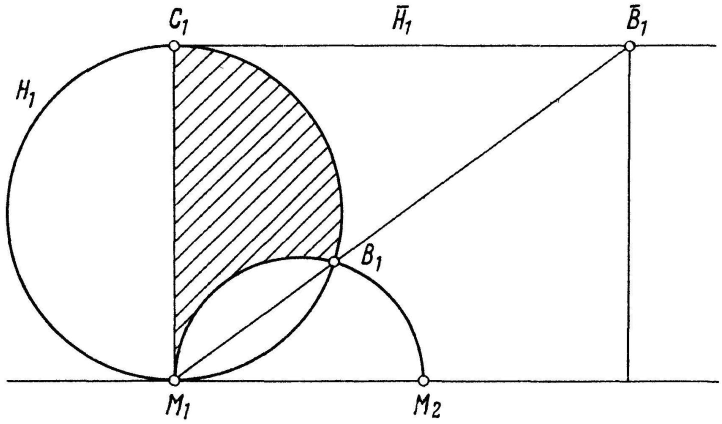
Es zeigt sich, dass wir damit die Masszahl F gefunden haben. Mit (4) und (3) ergibt sich dann die gesuchte Volumenmasszahl:

$$V_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{a}{h}\right)^2. \tag{6}$$

c) *Die Masszahlen* V_1, V_2, V_3

Es genügt, eine der drei Masszahlen zu bestimmen, da die drei zugehörigen Körper zueinander kongruent sind.

Einer dieser drei Körper wird begrenzt von der Horosphärenfläche H_1, einer hyperbolischen Ebene, welche die Punkte M_1, M_2, M_3 enthält, und den beiden Ebenen E_3 und E_1. Figur 4 zeigt die Ebene E_1 und schraffiert das vom Körper aus ihr geschnittene Flächenstück.



Figur 4

Zur Volumbestimmung des beschriebenen Körpers führen wir eine Inversion durch an einer Kugel um M_1 mit dem Radius $M_1 C_1 = 2r$. Das Bild der Horosphäre H_1 ist dann eine euklidische Ebene $\overline{H}_1$, parallel zur Grundebene. Der euklidische Kreis durch M_1, B_1, M_2 wird zu einer euklidischen Geraden, senkrecht zur Grundebene durch den Bildpunkt $\overline{B}_1$ und B_1. Die Ebenen E_3 und E_1 gehen sich in über. Nach den Gesetzen der Inversion gilt für die Länge der euklidischen Strecke $C_1\overline{B}_1$:

$$C_1\,\overline{B}_1 \cdot 2\,a = 4\,r^2 \quad \text{also} \quad C_1\,\overline{B}_1 = \frac{2\,r^2}{a}. \tag{7}$$

Hyperbolisch gesehen handelt es sich bei unserer Abbildung um eine Spiegelung. Der fragliche Horosphärenkörper vom Inhalt V_1 geht in einen neuen Körper gleichen Volumens über, der von derselben Gestalt ist, wie der bei b) betrachtete. An die Stelle der Grössen a und h in Formel (6) treten jetzt nach (7) die Grössen r^2/a und $2\,r$. Wir erhalten also:

$$V_1 = V_2 = V_3 = \frac{\sqrt{3}}{8}\left(\frac{r}{a}\right)^2. \tag{8}$$

4. Die Überdeckungsdichte

Aus Gründen der Regularität genügt es, die Überdeckungsdichte d lediglich im Bereich unseres asymptotischen Tetraeders zu bestimmen. Dort gilt:

$$d = \frac{V_0 + V_1 + V_2 + V_3}{T}.$$

Dabei sind V_0, V_1, V_2, V_3 und T die im letzten Abschnitt berechneten Inhaltsmasszahlen. Für die Überdeckungsdichte innerhalb des asymptotischen Tetraeders und damit im ganzen hyperbolischen Raum erhalten wir also mit (6) und (8):

$$d = \frac{\sqrt{3}}{2\,T}\left\{\left(\frac{a}{h}\right)^2 + \frac{3}{4}\left(\frac{r}{a}\right)^2\right\}.$$

Das ergibt mit (1) und $(h/a)^2 = \mu$:

$$d = \frac{\sqrt{3}}{96\,T} \, \frac{9\,\mu^2 + 24\,\mu + 64}{\mu} . \tag{9}$$

Diese Funktion hat für unsere Überlegungen nur einen Sinn im Bereich $r \leqq h < 2\,r$, oder $4/3 \leqq \mu < \infty$. An der Stelle $\mu = 8/3$ liegt das Dichteminimum $3\sqrt{3}\,/4\,T$ vor. Mit (2) erhalten wir folgende Dichteabschätzung:

$$d \geqq \left[\sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(1+3\,k)^2} - \frac{1}{(2+3\,k)^2} \right\} \right]^{-1} .$$

Ist die Dichte d gegeben, so errechnet sich aus (9) sofort ein Wert für μ. Damit aber können wir die vier speziellen Horosphären H_0, H_1, H_2 und H_3 und davon ausgehend durch Spiegelungen die gesamte Überdeckung des hyperbolischen Raumes konstruieren.

H. ZEITLER, Weiden/Deutschland

LITERATURVERZEICHNIS

[1] L. FEJES TÓTH, *Kreisüberdeckungen der hyperbolischen Ebene*, Acta Math. Acad. Sci. Hung. *4*, 111–114 (1953).
[2] L. FEJES TÓTH, *Über die dünnste Horozyklenüberdeckung*, Acta Math. Acad. Sci. Hung. *7*, 95–98 (1956).
[3] H. ZEITLER, *Eine reguläre Horozyklenüberdeckung der hyperbolischen Ebene im Poincaré-Modell*. El. Math. *19*, 73–77 (1964).
[4] H. S. M. COXETER, *Arrangements of Equal Spheres in Non-Euclidean Spaces*, Acta Math. Acad. Sci. Hung. *5*, 263–274 (1954).
[5] L. FEJES TÓTH, *On Close Packings of Spheres in Spaces of Constant Curvature*, Public. math. *3*, 158–167 (1953).
[6] L. FEJES TÓTH, *Kugelunterdeckungen und Überdeckungen in Räumen konstanter Krümmung*, Arch. Math. *10*, 307–313 (1959).
[7] H. LIEBMANN, *Nichteuklidische Geometrie* (Verlag Göschen, Leipzig, 1905).
[8] H. S. M. COXETER, *The Functions of* SCHLÄFLI *and* LOBATSCHEFSKY, Quart. J. Math., Oxford Ser. *6*, 13–29 (1935).

Sur trois nombres triangulaires en progression arithmétique à différence triangulaire

On démontre sans peine qu'il n'existe pas trois nombres carrés distincts formant une progression arithmétique à différence carré. En effet, s'il était, pour les nombres naturels x, y, z et t, $y^2 - x^2 = t^2$ et $z^2 - y^2 = t^2$, on aurait $y^2 - t^2 = x^2$, $y^2 + t^2 = z^2$, d'où $y^4 - t^4 = (x\,z)^2$ et cette équation, comme on le sait, n'a pas de solutions en nombres naturels x, y, z et t.

Or, je démontrerai ici d'une façon élémentaire le théorème T suivant:

T*. *Il existe une infinité de triples de nombres triangulaires formant une progression arithmétique à différence triangulaire.

Démonstration. Je démontrerai d'abord que le théorème T équivaut à la proposition P suivante:

P*. *Il existe une infinité de solutions en nombres impairs $x > 1$, $y \neq x$, z et u du système d'équations

$$x^2 + z^2 = 2\,y^2 \qquad et \qquad y^2 - x^2 = u^2 - 1 . \tag{1}$$