

Über Kegelschnitte mit gemeinsamem Krümmungselement

Autor(en): **Hoschek, J.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **21 (1966)**

Heft 1

PDF erstellt am: **10.08.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-24644>

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

IV. Beispiel

Nach [6] ist im Ring G_2 der ganzzahligen quadratischen Matrizen der Ordnung 2

$$\alpha^* = \begin{pmatrix} 0 & 2rt \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta^* = \begin{pmatrix} 0 & r^2 - t^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^* = \begin{pmatrix} 0 & r^2 + t^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

mit ganzzahligem r und t ein nichttriviales Lösungstriple für den Exponenten $n = 4$. Nach den obigen Überlegungen ist dann

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 2rt \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & r^2 - t^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & r^2 + t^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

ein nichttriviales Lösungstriple von (1) für $n = 2^3 = 8$ im Ring G_4 der ganzzahligen quadratischen Matrizen der Ordnung 4. Das kann man übrigens auch direkt durch Nachrechnung verifizieren.

R. Z. DOMIATY, Graz

LITERATUR

- [1] A. AIGNER, *Über die Möglichkeit von $x^4 + y^4 = z^4$ in quadratischen Körpern*. Jahresber. d. Deutsch. Math.-Ver. 43, Heft 9/12, S. 226–229 (1934).
- [2] A. AIGNER, *Weitere Ergebnisse über $x^3 + y^3 = z^3$ in quadratischen Körpern*. Monatsh. f. Math. 56, 3. Heft, S. 240–252 (1952).
- [3] A. AIGNER, *Ein zweiter Fall der Unmöglichkeit von $x^3 + y^3 = z^3$ in quadratischen Körpern mit durch 3 teilbarer Klassenzahl*. Monatsh. f. Math. 56, 4. Heft, S. 335–338 (1952).
- [4] A. AIGNER, *Die kubische Fermatgleichung in quadratischen Körpern*. J. f. reine u. angew. Math. 195, Heft 1/2, S. 3–17 (1956).
- [5] A. AIGNER, *Die Unmöglichkeit von $x^6 + y^6 = z^6$ und $x^9 + y^9 = z^9$ in quadratischen Körpern*. Monatsh. f. Math. 61, Heft 2, S. 147–150 (1957).
- [6] R. Z. DOMIATY, *Solutions of $x^4 + y^4 = z^4$ in 2×2 Integral Matrices* (Erscheint im American Mathematical Monthly).

Über Kegelschnitte mit gemeinsamem Krümmungselement

F. LAURENTI hat in zwei Untersuchungen [2]¹⁾, [3] gezeigt, dass die Achsen von Parabeln mit gemeinsamem Krümmungselement eine *Steiner-Zykloide* einhüllen. W. KICKINGER [1] hat dem analytischen Beweis von LAURENTI einen synthetischen gegenübergestellt und ausserdem noch nachgewiesen, dass sich die Brennpunkte von Parabeln mit gemeinsamem Krümmungselement auf Kreisen bewegen. In der vorliegenden Untersuchung sollen die gleichen Fragen für allgemeine Kegelschnitte g (*Ellipsen und Hyperbeln*) diskutiert werden.

Es sei K der Krümmungsmittelpunkt eines beliebigen Punktes P des Kegelschnitts g und t die Kurventangente in P . Wir wählen ein kartesisches Bezugskreuz so, dass t mit der x -Achse und P mit O zusammenfallen, wodurch K im Abstand R von O

¹⁾ Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 10.

auf die y -Achse zu liegen kommt. Der Krümmungsradius einer Kurve $y = f(x)$ in O ist daher durch

$$R = \frac{1}{y''} \quad (1)$$

bestimmt.

Wir gehen von der Gleichung eines Kegelschnitts g in der Form

$$\lambda^2 \xi^2 + \eta^2 = 2 p \xi \quad (\lambda^2, p = \text{const}) \quad (2)$$

aus. Dabei treten für $\lambda^2 \neq 1$, $\lambda^2 > 0$ Ellipsen, für $\lambda^2 = 0$ Parabeln, für $\lambda^2 < 0$ Hyperbeln und für $\lambda^2 = 1$ Kreise auf. Durch die Transformation

$$\xi = x \cos \alpha + y \sin \alpha + C_1, \quad \eta = -x \sin \alpha + y \cos \alpha + C_2 \quad (3)$$

wird (2) in eine allgemeine Kegelschnittgleichung verwandelt. Die Konstanten C_1 und C_2 in der Transformation (3) sind durch die Bedingungen

$$y = 0 \text{ für } x = 0, \quad y' = 0 \text{ für } x = y = 0, \quad y'' = \frac{1}{R} \text{ für } y' = x = y = 0 \quad (4)$$

bestimmt, so dass die Gleichung von g mit (3) und den Bedingungen (4) die Form annimmt

$$\lambda^2 (x \cos \alpha + y \sin \alpha)^2 + (x \sin \alpha - y \cos \alpha)^2 = 2 R y (\lambda^2 \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha), \quad (5)$$

wobei R der Krümmungsradius ist und α der Winkel zwischen einer Hauptachse von g und der x -Achse. λ^2 entspricht dem Achsenverhältnis.

Der Mittelpunkt von g hat die Koordinaten

$$x = \frac{R}{\lambda^2} (1 - \lambda^2) \frac{\sin 2 \alpha}{2} (\lambda^2 \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha), \quad y = \frac{R}{\lambda^2} (\lambda^2 \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)^2, \quad (6)$$

so dass sich folgende Gleichungen der Kegelschnittachsen ergeben

$$a_1: \quad y \cos \alpha - x \sin \alpha = R \cos \alpha (\lambda^2 \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha), \quad (7a)$$

$$a_2: \quad y \lambda^2 \sin \alpha + x \lambda^2 \cos \alpha = R \sin \alpha (\lambda^2 \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha). \quad (7b)$$

Durch Differentiation der Gleichungen von a_1 und a_2 nach dem Parameter α sowie Elimination von x bzw. y erhalten wir als Gleichungen der Hüllkurven h_1 und h_2 von a_1 und a_2 :

$$\left. \begin{aligned} h_1: \quad x &= -R (1 - \lambda^2) \left[\frac{\sin 2 \alpha}{2} + \frac{\sin 4 \alpha}{4} \right] \\ y &= \frac{R}{4} (3 \lambda^2 + 1) - R (1 - \lambda^2) \left[\frac{\cos 2 \alpha}{2} - \frac{\cos 4 \alpha}{4} \right], \end{aligned} \right\} \quad (8a)$$

$$\left. \begin{aligned} h_2: \quad x &= -R \left(\frac{1 - \lambda^2}{\lambda^2} \right) \left[\frac{\sin 2 \alpha}{2} - \frac{\sin 4 \alpha}{4} \right] \\ y &= \frac{R}{4} \left(\frac{\lambda^2 + 3}{\lambda^2} \right) - R \left(\frac{1 - \lambda^2}{\lambda^2} \right) \left[\frac{\cos 2 \alpha}{2} + \frac{\cos 4 \alpha}{4} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (8b)$$

Beide Kurven sind wieder *Steiner-Zykloiden*, wobei jeweils eine Spitze im Krümmungszentrum K liegt (s. Abb. 1, 2). Als Erweiterung des Ergebnisses von LAURENTI ergibt sich daher folgender

Satz: Die Hüllkurven der Achsen von Ellipsen und Hyperbeln mit gemeinsamem Krümmungselement und konstantem Achsenverhältnis sind zwei Steiner-Zyklo-

iden. Sie haben die gemeinsame Hauptnormale der Kurvenschar zur Symmetrieachse, eine Spitze jeder Kurve liegt im gemeinsamen Krümmungszentrum.

Von Interesse sind auch die Ortskurven ausgezeichneter Punkte der betrachteten Kegelschnittschar. Die Bahnkurve der Mittelpunkte der Kegelschnitte folgt aus Gleichung (6). Durch elementare Umformungen lässt sich (6) auf folgende Form bringen:

$$\left. \begin{aligned} y &= \frac{R}{\lambda^2} \left[\left(\frac{3}{8} \lambda^4 + \frac{\lambda^2}{4} + \frac{3}{8} \right) + \frac{\lambda^4 - 1}{2} \cos 2\alpha + \frac{(1 - \lambda^2)^2}{8} \cos 4\alpha \right] \\ x &= \frac{R}{\lambda^2} \left[-\frac{1 - \lambda^4}{4} \sin 2\alpha - \frac{(1 - \lambda^2)^2}{8} \sin 4\alpha \right]. \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

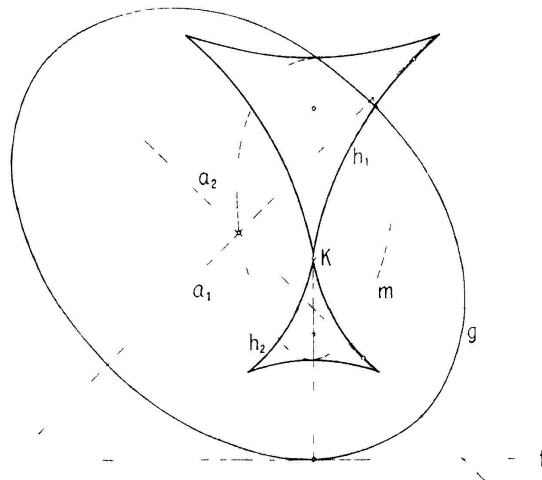


Abbildung 1

Ellipsen mit gemeinsamem Krümmungselement.

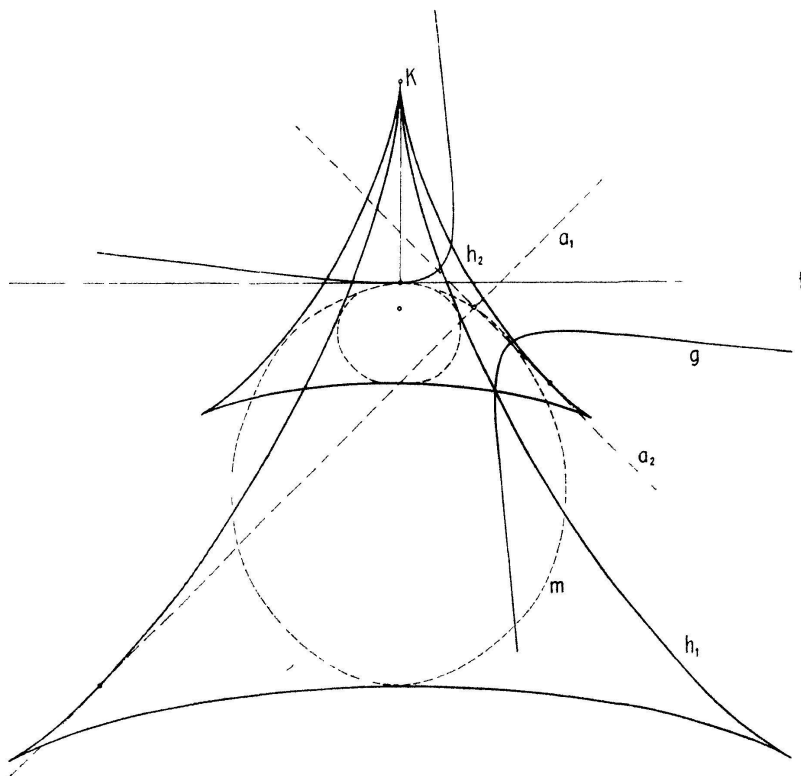


Abbildung 2

Hyperbeln mit gemeinsamem Krümmungselement.

Überträgt man (9) in die komplexe Schreibweise (vgl. [4]), so ergibt sich die Gleichung

$$m = i \frac{R}{\lambda^2} \left[\left(\frac{3}{8} \lambda^4 + \frac{\lambda^2}{4} + \frac{3}{8} \right) + \frac{3}{8} (\lambda^4 - 1) e^{2i\alpha} + \frac{\lambda^4 - 1}{8} e^{-2i\alpha} + \frac{(1 - \lambda^2)^2}{8} e^{4i\alpha} \right]. \quad (9a)$$

Die Bahnkurve des Mittelpunktes der betrachteten Kegelschnittschar ist also eine *Radlinie 3. Stufe*.

Die Ortskurven der Brennpunkte und Scheitel der Scharkurven liegen allgemein nicht mehr auf Radlinien, da die Bestimmung der Hauptachsen der Scharkurven auf algebraische Formen führt.

Eine Ausnahme bildet lediglich der Fall $\lambda^2 = 0$, also Parabeln mit gemeinsamem Krümmungselement. Der Scheitel aller Scharkurven liegt dann auf einer *Radlinie 3. Stufe*, ausserdem bewegen sich alle Punkte der Parabelachsen, die vom jeweiligen Scheitel einen konstanten Abstand haben, auf *Radlinien 4. Stufe*. Ebenfalls *Radlinien 4. Stufe* sind die Bahnkurven aller der Punkte der Achsen von Hyperbeln und Ellipsen, die von den Mittelpunkten der Scharkurven konstanten Abstand haben.

In den beiden Abbildungen sind Ellipsen und Hyperbeln mit gemeinsamem Krümmungselement dargestellt. Als Achsenverhältnis wurde $\lambda^2 = \pm 2$, als Krümmungsradius $R = 2 |\lambda^2|$ gewählt. Die eingezeichneten Scharkurven g entsprechen dem Parameterwert $\alpha = \pi/4$, a_1 und a_2 sind die jeweiligen Achsen, h_1 und h_2 die zugehörigen Hüllkurven. m ist die Bahnkurve der Mittelpunkte der Scharkurven.

J. HOSCHEK, TH Darmstadt

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] W. KICKINGER, *Einfacher Beweis eines Satzes von F. LAURENTI über Parabeln mit gemeinsamem Krümmungselement*, *El. Math.* 18, 28–29 (1963).
- [2] F. LAURENTI, *Sopra una proprietà dell'ipocicloide tricuspideata*, *Periodico Mat. IV. Ser.* 38, 155–158 (1960).
- [3] F. LAURENTI, *Sopra una proprietà dell'ipocicloide tricuspideata*, *Archimede* 12, 253–256 (1960).
- [4] W. WUNDERLICH, *Höhere Radlinien*, *Österr. Ing. Archiv* 1, 277–296 (1947).

Zur Theorie der Funktionalgleichung $f(xy) = f(x) + f(y)$

1. Einleitung. Eine auf der Menge $P = \{x \in R \mid x > 0\}$ erklärte reellwertige Lösung der Funktionalgleichung

$$f(xy) = f(x) + f(y) \quad [f: P \rightarrow R] \quad (H)$$

nennen wir im folgenden eine *H-Funktion*. Im Hinblick auf die zentrale Problemstellung bei jeder Funktionalgleichung befassen wir uns hier mit der Frage, ob es ausser den Logarithmusfunktionen noch weitere H-Funktionen gebe. Diese Frage ist positiv zu beantworten (Korollar zu Satz 1). Ein weiteres Ziel dieser Note ist es, den bekanntesten Bedingungen, die die Logarithmusfunktionen unter allen H-Funktionen auszuzeichnen gestatten¹⁾, einige weitere grösstenteils scheinbar schwächere an die

¹⁾ Solche wurden in [8], Satz 6, zusammengestellt.