Zur Theorie der Funktionalgleichung $f(xy) = f(x) + f(y)$

Autor(en): **Rätz, Jürg**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **21 (1966)**

Heft 1

PDF erstellt am: **10.08.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-24645

Überträgt man (9) in die komplexe Schreibweise (vgl. [4]), so ergibt sich die Gleichung

$$\mathfrak{m} = i \frac{R}{\lambda^2} \left[\left(\frac{3}{8} \lambda^4 + \frac{\lambda^2}{4} + \frac{3}{8} \right) + \frac{3}{8} (\lambda^4 - 1) e^{2i\alpha} + \frac{\lambda^4 - 1}{8} e^{-2i\alpha} + \frac{(1-\lambda^2)^2}{8} e^{4i\alpha} \right]. \qquad (9a)$$

Die Bahnkurve des Mittelpunktes der betrachteten Kegelschnittschar ist also eine *Radlinie 3. Stufe.*

Die Ortskurven der Brennpunkte und Scheitel der Scharkurven liegen allgemein nicht mehr auf Radlinien, da die Bestimmung der Hauptachsen der Scharkurven auf algebraische Formen führt.

Eine Ausnahme bildet lediglich der Fall $\lambda^2 = 0$, also Parabeln mit gemeinsamem Krümmungselement. Der Scheitel aller Scharkurven liegt dann auf einer *Radlinie 3. Stufe,* ausserdem bewegen sich alle Punkte der Parabelachsen, die vom jeweiligen Scheitel einen konstanten Abstand haben, auf *Radlinien 4. Stufe.* Ebenfalls *Radlinien 4. Stufe* sind die Bahnkurven aller der Punkte der Achsen von Hyperbeln und Ellipsen, die von den Mittelpunkten der Scharkurven konstanten Abstand haben.

In den beiden Abbildungen sind Ellipsen und Hyperbeln mit gemeinsamem Krümmungselement dargestellt. Als Achsenverhältnis wurde $\lambda^2 = \pm 2$, als Krümmungsradius $R = 2\,|\lambda^2|$ gewählt. Die eingezeichneten Scharkurven g entsprechen dem Parameterwert $\alpha = \pi/4$, a_1 und a_2 sind die jeweiligen Achsen, h_1 und h_2 die zugehörigen Hüllkurven. $\mathfrak{m}$ ist die Bahnkurve der Mittelpunkte der Scharkurven.

J. Hoschek, TH Darmstadt

LITERATURVERZEICHNIS

[1] W. Kickinger, *Einfacher Beweis eines Satzes von* F. Laurenti *über Parabeln mit gemeinsamem Krümmungselement,* El. Math. *18,* 28–29 (1963).

[2] F. Laurenti, *Sopra una proprietà dell'ipocicloide tricuspidata,* Periodico Mat. IV. Ser. *38,* 155–158 (1960).

[3] F. Laurenti, *Sopra una proprietà dell'ipocicloide tricuspidata,* Archimede *12,* 253–256 (1960).

[4] W. Wunderlich, *Höhere Radlinien,* Österr. Ing. Archiv *1,* 277–296 (1947).

Zur Theorie der Funktionalgleichung $f(xy) = f(x) + f(y)$

1. Einleitung. Eine auf der Menge $P = \{x \in R \mid x > 0\}$ erklärte reellwertige Lösung der Funktionalgleichung

$$f(x\,y) = f(x) + f(y) \qquad [f\colon\ P \to R] \qquad \text{(H)}$$

nennen wir im folgenden eine *H-Funktion.* Im Hinblick auf die zentrale Problemstellung bei jeder Funktionalgleichung befassen wir uns hier mit der Frage, ob es ausser den Logarithmusfunktionen noch weitere H-Funktionen gebe. Diese Frage ist positiv zu beantworten (Korollar zu Satz 1). Ein weiteres Ziel dieser Note ist es, den bekanntesten Bedingungen, die die Logarithmusfunktionen unter allen H-Funktionen auszuzeichnen gestatten[1]), einige weitere grösstenteils scheinbar schwächere an die

[1]) Solche wurden in [8], Satz 6, zusammengestellt.

Seite zu stellen (Satz 3). Mit jeder solchen Eigenschaft wird der pathologische Charakter der unstetigen H-Funktionen präzisiert. Die Analogie der sich hier bietenden Situation mit derjenigen bei der Cauchyschen Grundgleichung

$$g(u+v) = g(u) + g(v) \qquad [g\colon R \to R] \tag{G}$$

springt ins Auge. In der Tat lassen sich nun auch wichtige Resultate aus der Theorie von (G) auf unsere Funktionalgleichung (H) übertragen.

2. Unstetige H-Funktionen. Unter einer additiven Funktion wollen wir im folgenden eine Lösung von (G) verstehen. Die Verbindung zwischen (H) und (G) wird hergestellt durch

Satz 1[2]: a) *Die H-Funktionen f und die additiven Funktionen g entsprechen einander in eineindeutiger Weise vermöge $f = g \circ l$, bzw. $g = f \circ l^{-1}$, wobei $\circ$ das Kompositionssymbol, l die natürliche Logarithmusfunktion und l^{-1} deren Umkehrfunktion bedeuten.* b) *Die H-Funktion f ist genau dann stetig auf P, wenn die zu f gehörige additive Funktion g auf R stetig ist.* c) *Der Logarithmusfunktion f mit $f(x) = c\, l(x)$ entspricht die additive Funktion g mit $g(u) = c\, u$.*

Beweis: Bekanntlich ist l streng monoton wachsend und über P stetig und besitzt die Wertmenge R. Somit existiert die Umkehrfunktion l^{-1} und ist nach bekannten Sätzen über ganz R stetig. Ferner genügt sie daselbst der Funktionalgleichung

$$l^{-1}(u+v) = l^{-1}(u)\, l^{-1}(v)\,. \tag{E}$$

In der Tat: Zu beliebigen $u, v \in R$ gibt es eindeutig $x, y \in P$ mit $u = l(x)$, $v = l(y)$, das heisst $l^{-1}(u) = x$, $l^{-1}(v) = y$. Daraus resultiert $l^{-1}(u+v) = l^{-1}[l(x) + l(y)] = l^{-1}[l(xy)] = xy = l^{-1}(u) \cdot l^{-1}(v)$. – Ist nun f eine H-Funktion und $g = f \circ l^{-1}$, so gilt $g(u+v) = f[l^{-1}(u+v)] = f[l^{-1}(u)\, l^{-1}(v)] = f[l^{-1}(u)] + f[l^{-1}(v)] = g(u) + g(v)$, womit die Additivität von g feststeht. – Ist umgekehrt g eine additive Funktion und $f = g \circ l$, so gilt $f(xy) = g[l(xy)] = g[l(x) + l(y)] = g[l(x)] + g[l(y)] = f(x) + f(y)$. Somit ist f eine H-Funktion. – Die Eineindeutigkeit des Sichentsprechens liegt auf der Hand. – b) folgt mit Rücksicht auf die Stetigkeit von l und l^{-1} aus dem Kompositionssatz für stetige Funktionen. – c) $g(u) = f[l^{-1}(u)] = c\, l[l^{-1}(u)] = c\, u$.

Als Korollar von Satz 1 ergibt sich unter Berufung auf die auf dem Auswahlaxiom fussende Konstruktion von G. Hamel [4] die Existenz unstetiger Lösungen von (H). Die Logarithmusfunktionen erscheinen also vom Standpunkt des Satzes 1 gewissermassen als die trivialen Lösungen von (H).

3. Ein Satz von A. Ostrowski. Die Hamelsche Konstruktion unstetiger additiver Funktionen löste zahlreiche Untersuchungen in der Theorie der Cauchyschen Grundgleichung aus[3], die von A. Ostrowski durch das Auffinden einer genügend schwachen hinreichenden Stetigkeitsbedingung gekrönt wurden[4]. Dass dieselbe Bedingung in gleicher Weise auch bei den H-Funktionen zuständig ist, besagt der folgende

[2]) Vergleiche [1], p. 48.
[3]) Historische Anmerkungen dazu findet man zum Beispiel in [3], p. 503 ff.
[4]) Vergleiche [7], p. 58.

Satz 2: *m bezeichne das eindimensionale Lebesguesche Mass. Gibt es zu einer H-Funktion f eine beschränkte m-messbare Menge M mit $M \subset P$, $m(M) > 0$ und ein offenes Intervall I ($\subset R$) mit $f(M) \cap I = \varnothing$, dann ist f auf ganz P stetig*[5].

Beweis: Wegen $M \subset P$, $P_{1/n} = \{x \in R \mid x \geq 1/n\}$, $\bigcup_{n=1}^{\infty} P_{1/n} = P$ gilt $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} (M \cap P_{1/n})$, und mit einem Grenzwertsatz des Lebesgueschen Masses folgt $m\,(M \cap P_{1/n}) \to m(M) > 0$ $[n \to \infty]$. Somit gibt es eine natürliche Zahl n mit $M' = M \cap P_{1/n}$, $m(M') > 0$ und wegen der Beschränktheit von M' zwei Zahlen $a, b \in P$ mit $M' \subset [a, b]$. Die natürliche Logarithmusfunktion l erfüllt über $[a, b]$ eine Lipschitz-Bedingung[6], ist also absolut stetig über $[a, b]$, und mit M' ist auch $l(M')$ m-messbar[7]. Aus der für beliebige $x, y \in P$ gültigen Beziehung[8])

$$\frac{y-x}{y} \leq l(y) - l(x) \leq \frac{y-x}{x} \tag{1}$$

ergibt sich $|y - x| \min\{1/y, 1/x\} \leq |l(y) - l(x)|$ und hieraus für $x, y \in [a, b]$ weiter $|y - x|/b \leq |l(y) - l(x)|$. Für $u = l(x)$, $v = l(y)$ entsteht daraus die Lipschitz-Bedingung

$$|l^{-1}(v) - l^{-1}(u)| \leq b\,|v - u| \qquad (u, v \in [l(a), l(b)])\,, \tag{2}$$

woraus wie vorhin die absolute Stetigkeit und schliesslich die Nullmengentreue von l^{-1} resultiert[9]. Die Annahme $m[l(M')] = 0$ würde also $m(M') = 0$ nach sich ziehen, was der Konstruktion von M' widerspricht; somit gilt $m[l(M')] > 0$[10]. Nach der Voraussetzung über M gilt nun erst recht $f(M') \cap I = \varnothing$, und für die gemäss Satz 1 zu f gehörige additive Funktion g ist dann $f(M') = g[l(M')]$. Meiden also die f-Werte über M' das Intervall I, so meiden es auch die g-Werte über der Menge $l(M')$, welche aber nach dem Vorangehenden positives Mass hat. Der genannte Satz von A. Ostrowski[4] erlaubt den Schluss auf die Stetigkeit von g, also nach Satz 1b auch auf diejenige von f.

Dank der zentralen Stellung, welche die in Satz 2 vorkommende Eigenschaft einer H-Funktion innehat, gibt es zahlreiche Korollarien, welche charakteristische Eigenschaften der Logarithmusfunktionen liefern, so zum Beispiel:

Satz 3: *Dafür, dass eine H-Funktion f sogar eine Logarithmusfunktion ist, erweist sich jede der folgenden Bedingungen als notwendig und hinreichend*[11]:

(X) *f ist auf mindestens einem Intervall beschränkt.*

(XI) *f ist auf mindestens einem Intervall einseitig beschränkt.*

(XII) *Auf mindestens einem Intervall meiden die f-Werte ein offenes Intervall.*

(XIII) *f ist auf mindestens einem Intervall im Riemannschen Sinne eigentlich integrierbar.*

---

[5]) Selbstverständlich bedeutet die Annahme der Beschränktheit von M keine Einbusse an Allgemeinheit. Andererseits deutet sie auf die Möglichkeit hin, den nachfolgenden Beweis im Rahmen der sich auf beschränkte Mengen beziehenden Masstheorie im engeren Sinne zu führen.

[6]) Vergleiche etwa [2], p. 117, oder [8], Satz 6, VIII.

[7]) Vergleiche etwa [6], p. 270, 271, 278.

[8]) Vergleiche etwa [2], p. 116, oder [8], Satz 6, VI.

[9]) Vergleiche etwa [6], p. 271, 276, 277.

[10]) Für eine Variante zu diesen Gedankengängen kann man sich etwa auf [5], p. 138–141, stützen.

[11]) Diese Bedingungen treten in der Theorie der Cauchyschen Grundgleichung (G) auf. Vergleiche etwa [1], p. 48; [7], p. 56 ff; [9];[8]). Die Numerierung der Eigenschaften lehnt sich an [8], Satz 6 an. Die Messbarkeit von Mengen und Funktionen bezieht sich überall auf das eindimensionale Lebesguesche Mass.

(XIV) *f ist auf mindestens einem Intervall endlich und messbar.*
(XV) *f hat auf mindestens einem Intervall eine endliche und messbare Majorante.*
(XVI) *f hat auf mindestens einer Menge positiven Masses eine endliche und messbare Majorante.*
(XVII) *f ist auf mindestens einer Menge positiven Masses einseitig beschränkt.*
(XVIII) *Auf mindestens einer Menge positiven Masses meiden die f-Werte ein offenes Intervall.*

Beweis: Es bestehen die folgenden Schlussketten: (X) $\Rightarrow$ (XI) $\Rightarrow$ (XII) $\Rightarrow$ (XVIII); (XIII) $\Rightarrow$ (XIV) $\Rightarrow$ (XV) $\Rightarrow$ (XVI) $\Rightarrow$ (XVII) $\Rightarrow$ (XVIII). Die meisten Schlüsse liegen auf der Hand[12]). Bezeichnet (III) die Stetigkeit von f auf P, so besagt Satz 2 die für H-Funktionen bestehende Implikation (XVIII) $\Rightarrow$ (III), womit das Hinreichen von (X) bis (XVIII) erwiesen ist. Mit der Bemerkung (III) $\Rightarrow$ (X), (III) $\Rightarrow$ (XIII) ergibt sich auch die Notwendigkeit.

JÜRG RÄTZ, Bern

LITERATURVERZEICHNIS

[1] J. ACZÉL, *Vorlesungen über Funktionalgleichungen und ihre Anwendungen* (Birkhäuser Basel–Stuttgart 1961).
[2] M. BARNER, *Differential- und Integralrechnung I* (de Gruyter Berlin 1961).
[3] J. W. GREEN and W. GUSTIN, *Quasiconvex Sets*, Canadian J. Math. *2*, 489–507 (1950).
[4] G. HAMEL, *Eine Basis aller Zahlen und die unstetigen Lösungen der Funktionalgleichung* $f(x+y) = f(x) + f(y)$. Math. Ann. *60*, 459–462 (1905).
[5] O. HAUPT und G. AUMANN, *Differential- und Integralrechnung III* (de Gruyter Berlin 1938).
[6] I. P. NATANSON, *Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen* (2. Aufl.), (Akademie-Verlag Berlin 1961).
[7] A. OSTROWSKI, *Mathematische Miszellen XIV: Über die Funktionalgleichung der Exponentialfunktion und verwandte Funktionalgleichungen*, Jahresber. Deutsche Math.-Ver. *38*, 54–62 (1929).
[8] J. RÄTZ, *Begründung und Charakterisierung der reellen Logarithmusfunktionen*. El. Math. *20*, 122–128 (1965).
[9] G. S. YOUNG, *The Linear Functional Equation*, Amer. Math. Monthly *65*, 37–38 (1958).

[12]) Für (XIII) $\Rightarrow$ (XIV) verweisen wir etwa auf [6], p. 145.

Kleine Mitteilungen

Über die Dualität bei der Konstruktion von Kegelschnitten

Der bekannten Fadenkonstruktion der Kegelschnitte aus den Brennpunkten steht in der nichteuklidischen Ebene dual die Konstruktion aus den Brennlinien gegenüber, wobei die Summe der Winkel, die eine Kegelschnittangente mit einem Brennlinienpaar bildet, konstant ist [1][1]). Wir wollen hier untersuchen, welche Konstruktion der allgemeineren Fadenkonstruktion von GRAVES [2] in der nichteuklidischen Ebene dual entspricht, und versuchen, die Betrachtungen in den Raum zu übertragen.

GRAVES hat gezeigt: *Schlingt man um eine Ellipse einen geschlossenen Faden f und spannt ihn über einen Punkt P, so ist P auf einer zur Ellipse konfokalen Ellipse beweglich.* Diese Konstruktion gilt auch in der nichteuklidischen Ebene [1].

[1]) Die Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, Seite 15.
[2]) Die Überlegungen lassen sich aber auch in die hyperbolische Ebene übertragen, wenn man im Klein-Cayleyschen Modell die Fadenkonstruktion auch in das Äussere des absoluten Kegelschnittes ausdehnt.