Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Band: 21 (1966)

Heft: 1

Rubrik: Aufgaben

that LJ_j is the isodynamic join of $\Delta\, A_{j_1}A_{j_2}A_{j_3}$ or, somewhat more sophisticated, that LJ_j is parallel to this isodynamic join. To establish this fact we observe that J_j is the orthocenter of $\Delta\, J_kJ_lJ_m$, $jklm$ being a permutation of the indices 0, 1, 2, 3, whereas $\Delta\, A_1A_2A_3$ is the pedal triangle of J_j with respect to $\Delta\, J_kJ_lJ_m$. Moreover the triangles $J_kJ_lJ_m$ and $A_{j_1}A_{j_2}A_{j_3}$ are homothetic. Their isodynamic joins are therefore parallel. Denoting by O_j the circumcenter of $\Delta\, J_kJ_lJ_m$ we see by the above theorem that O_jH is the isodynamic join of $\Delta\, J_kJ_lJ_m$. As O_j is the reflection of J_j with respect to O, we have $LJ_j \parallel O_jH$, which proves the assertion.

G. R. VELDKAMP, Technological University Eindhoven, Netherlands

REFERENCES

[1] COXETER, H. S. M., *Introduction to Geometry*, p. 13–16. New York–London 1961.
[2] Amer. Math. Monthly, vol. *71*, 176 (1964).
[3] Mathesis, p. 88, 1890.

Aufgaben

Aufgabe 493. Es seien $f(t)$, $g(t)$ zwei stetige periodische Funktionen mit der Periode 2π, deren erste Fourier-Koeffizienten verschwinden:

$$\int_0^{2\pi} f(t)\cos t\, dt = \int_0^{2\pi} f(t)\sin t\, dt = \int_0^{2\pi} g(t)\cos t\, dt = \int_0^{2\pi} g(t)\sin t\, dt = 0\,.$$

Ausserdem sei $g(t) > 0$. Dann hat $f(t)/g(t)$ wenigstens vier Extrema in $0 \leqq t < 2\pi$.

Dieser Satz enthält alle bekannten Sätze aus der Verwandtschaft des Vierscheitelsatzes. Man beweise ihn und finde neue Anwendungen.

H. GUGGENHEIMER, Minneapolis (USA)

Lösung des Aufgabenstellers: 1. Eine stetige Funktion ist dann und nur dann der Krümmungsradius eines C^2-Ovals als Funktion des Stützwinkels t (Winkel zwischen x-Achse und orientierter Tangente), wenn sie die Bedingungen für $g(t)$ erfüllt. In diesem Fall ist nämlich, wenn s die Bogenlänge und $\boldsymbol{x}(s)$ die Vektorgleichung bedeutet,

$$\boldsymbol{x}(2\pi) - \boldsymbol{x}(0) = \oint d\boldsymbol{x} = \oint \boldsymbol{x}'\, ds \equiv \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix} g(t)\, dt = 0\,.$$

Die Kurve $\boldsymbol{x}(s)$ ist lokal konvex, sternförmig und geschlossen, also einfach geschlossen und (z.B. nach Satz 1, p. 115 in STRUBECKER, *Differentialgeometrie I*, 3. Aufl. Sammlung Göschen 1113/1113a) konvex.

2. Der behauptete Satz folgt nun nach dem HERGLOTZschen (indirekten) Beweis des Vierscheitelsatzes (l.c. p. 119). Wir nehmen an, dass $d(f/g)$ nur zwei Nullstellen besitze, die den Punkten A, B auf $\boldsymbol{x}(s)$ entsprechen. $h(x, y) \equiv a\,x + b\,y + c = 0$ sei die Verbindungsgerade von A und B. $h(x, y)\; d(f/g)$ hat dann in allen von A und B verschiedenen Punkten dasselbe Vorzeichen. Andererseits ist

$$\int_0^{2\pi} d(f/g) = 0 \text{ und} \int_0^{2\pi} \boldsymbol{x}\; d(f/g) = -\int_0^{2\pi} f\, g^{-1}\, \boldsymbol{x}'\, ds = -\int_0^{2\pi} f(t) \begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix} dt = 0\,.$$

Man erhält also den Widerspruch

$$\int_0^{2\pi} (a\,x + b\,y + c)\; d(f/g) = 0\,.$$

Anwendungen: 1. Es sei $R(\vartheta)$ der Krümmungsradius eines Ovals als Funktion des Stützwinkels, φ ein fester Winkel. $R(\vartheta + \varphi)/R(\vartheta)$ hat wenigstens 4 Extrema. 2. Es sei $r(\vartheta)$ der Radiusvektor eines anderen Ovals, gemessen vom Schwerpunkt aus, als Funktion des *Polar*winkels. $R(\vartheta) r(\vartheta)^{-3}$ hat wenigstens 4 Extrema. 3. Es sei r^* der Radiusvektor eines anderen Ovals, gemessen vom Schwerpunkt aus, als Funktion des Polarwinkels. r/r^* hat wenigstens 4 Extrema. Insbesondere gilt dies für $r(\vartheta)/r(\vartheta + \varphi)$. 4. Es sei $p(\vartheta)$ die Stützfunktion eines Ovals als Funktion des Stützwinkels, gemessen vom Krümmungsschwerpunkt aus. Beispiele von 4-Extrem-Funktionen sind $p(\vartheta)/p(\vartheta + \varphi)$, $p(\vartheta)/r^3(\vartheta + \varphi)$, $p(\vartheta)/R(\vartheta + \varphi)$, $p(\vartheta)/p^*(\vartheta)$, wobei sich die verschiedenen Funktionen auf verschiedene Ovale beziehen können. 5. Es sei O ein beliebiger Punkt im Innern des Ovals, h die Stützfunktion gemessen von O aus. Dann ist O auch der Schwerpunkt einer Massenverteilung auf der Eilinie, die in jedem Punkt die Dichte $(R\,h^2)^{-1}$ hat. Auf Polarkoordinaten umgerechnet bedeutet dies, dass die Funktion $r^3\,R^{-1}\,h^{-3}$ wenigstens 4 Extrema hat. Für eine mehr geometrische Deutung bemerkt man, dass $r\,h^{-1}$ gleich dem cosecans des Winkels zwischen Radiusvektor und Tangente ist. Ausserdem ist $(R\,h^3)^{-1}$ die unimodular centro-affine Krümmung zum Zentrum O. Die Krümmung hat im allg. keinen Vierscheitelsatz (z.B. exzentrische Ellipse). Aus der Aufgabe folgt aber: *Die unimodular centro-affine Krümmung eines Ovals relativ zum Schwerpunkt genügt einem Vierscheitelsatz.*

Aufgabe 494. Gegeben sei ein C^2-Oval und ein innerer Punkt O. Man berechne die Änderung der Stützfunktion (gemessen von O aus) relativ zu sich entsprechenden Punkten in einer Affinität, für die O Fixpunkt ist. H. GUGGENHEIMER, Minneapolis (USA)

1. Lösung: Das Oval ist (bis auf Bewegungen) durch die Stützfunktion $h(\varphi)$ mit der Periode 2π gegeben. Die Koordinaten des Berührungspunktes der Stützgeraden sind bekanntlich

$$x_1 = h(\varphi)\cos\varphi - h'(\varphi)\sin\varphi,\quad x_2 = h(\varphi)\sin\varphi + h'(\varphi)\cos\varphi. \tag{1}$$

Die Affinität mit dem Fixpunkt $O = (0, 0)$ werde durch

$$X_i = a_{i1}\,x_1 + a_{i2}\,x_2, \qquad (i = 1, 2) \tag{2}$$

vermittelt. Die Determinante $\Delta = a_{11}\,a_{22} - a_{21}\,a_{12} \neq 0$ ist gleich dem Affinitätsverhältnis. Durch Einsetzen von (1) in (2) erhält man die Parameterdarstellung des Bildovals. Die Tangente im Punkt (X_1, X_2) hat die Gleichung $(\xi_1 - X_1)\,X_2' - (\xi_2 - X_2)\,X_1' = 0$, wobei der Strich Ableitung nach φ bedeutet. Die Stützfunktion $H(\varphi)$ im Bildpunkt ergibt sich aus der Hesseschen Normalform der Tangente zu

$$H(\varphi) = \frac{X_1'\,X_2 - X_1\,X_2'}{(X_1'^2 + X_2'^2)^{1/2}} = \frac{1}{(X_1'^2 + X_2'^2)^{1/2}} \left| \begin{pmatrix} x_1' & x_2' \\ x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \right| .$$

Bezeichnet man mit $\boldsymbol{e} = (-\sin\varphi, \cos\varphi)$ den auf der Stützgeraden liegenden Einheitsvektor und mit $\|\,\boldsymbol{e}^*\,\|$ die Länge seines Bildes $\boldsymbol{e}^*$, so ergibt sich nach leichter Rechnung (und Kürzen mit $h + h''$)

$$H(\varphi) : h(\varphi) = \Delta : \|\,\boldsymbol{e}^*\,\| .$$

K. ZACHARIAS, Berlin

2. Lösung (des Aufgabenstellers): Es seien P, P^* ein Paar affiner Punkte mit den Tangenten t, t^* und ϱ, ϱ^* die zugehörigen Krümmungsradien. n sei das Affinitätsverhältnis und λ das Verhältnis zweier entsprechender Strecken auf t und t^*. Dann gilt die Beziehung [1])

$$\varrho^* : \varrho = \lambda^3 : n . \tag{1}$$

Die (zentrale) Affinität ist das Produkt einer unimodularen Affinität und einer Homothetie mit dem Streckungsverhältnis $\sqrt{n}$. $\varrho\,h^3(\varphi)$ ist invariant bei der unimodularen Affinität, und geht bei der Homothetie in $n^2\,\varrho\,h^3(\varphi) = \varrho^*\,H^3(\varphi)$ über. Mittels (1) folgt sofort

$$H(\varphi) : h(\varphi) = n : \lambda .$$

---

[1]) Vgl. E. TROST: Über das Verhalten des Krümmungsradius bei Affinität, El. Math. 3, 81–82 (1948).

Aufgabe 495. Man bestimme in einem rechtwinkligen Koordinatensystem die Einhüllende einer Ellipsenschar, wobei (0, 0) gemeinsamer Brennpunkt ist, alle Ellipsen dieselbe Hauptachse $2a$ haben und der Punkt $(s, 0)$ jeder Ellipse angehört $(0 < s < 2a)$.

F. GÖTZE, Jena

Lösung: Der geometrische Ort für den zweiten Brennpunkt einer Ellipse der Schar ist der Kreis um $S(s, 0)$ mit Radius $2a - s$. Sind F, F_1 und F, F_2 die Brennpunkte zweier solcher Ellipsen, so liegt deren zweiter reeller Schnittpunkt S' auf der Mittelnormalen von $\overline{F_1F_2}$. Der Berührungspunkt B der Ellipse (F, F_1) mit ihrer Enveloppe ist daher ihr zweiter Schnittpunkt mit der Geraden SF_1. Wegen $BF + BS = (BF + BF_1) + F_1S = 4a - s$ ist der Ort von B die Ellipse mit den Brennpunkten F und S und der Hauptachse $4a - s$.

C. BINDSCHEDLER, Küsnacht

Herr R. BEREIS (Dresden) weist darauf hin, dass die Aufgabe an mehreren Stellen in der Literatur gelöst wurde: O. EMERSLEBEN, Math. Nachr. *3*, 62–70 (1949); T. PÖSCHL, Einführung in die analytische Mechanik, Karlsruhe 1949, S. 24–26; K. STRUBECKER, Math. Nachr. *4*, 36–46 (1950); H. R. MÜLLER, Math. Nachr. *7*, 289–292 (1952); R. BEREIS, Die Pyramide *2*, 227–232 (1953).

Weitere Lösungen sandten R. KUTSMICHEL (Langendiebach), A. PIWINSKI, O. REUTTER (Ochsenhausen), K. SCHULER (Rottweil), K. ZACHARIAS (Berlin).

Aufgabe 496. Man zeige, dass die Gleichung

$$x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_1 = 0$$

keine rationalen Lösungen mit $x_1 x_2 x_3 \neq 0$ hat.

C. BINDSCHEDLER, Küsnacht

Solution: If the equation has a solution in rationals x_1, x_2, x_3 $(x_1 x_2 x_3 \neq 0)$ it has a solution in integers x_1, x_2, x_3 with $(x_1, x_2, x_3) = 1$. Now if for a prime p

$$p^a \parallel x_1 \text{ and } p^b \parallel x_3\,, \text{ then } p^{2a} \parallel x_1^2 x_2\,,\ p^b \parallel x_2^2 x_3 \text{ and } p^{2b+a} \parallel x_3^2 x_1$$

and therefore $b = 2a$. It now follows that x_1, x_2, x_3 must have the form

$$x_1 = n_1 n_2^2,\ x_2 = n_2 n_3^2,\ x_3 = n_3 n_1^2 \text{ with } (n_1, n_2) = (n_1, n_3) = (n_2, n_3) = 1\,.$$

This implies

$$n_1^3 + n_2^3 + n_3^3 = 0\,.$$

It is well known that this last equation has no solutions in integers n_1, n_2, n_3 with $n_1 n_2 n_3 \neq 0$ completing our proof.

J. H. VAN LINT, Eindhoven

W. SZYMICZEK (Katowice) und A. MAKOWSKI (Warschau) weisen darauf hin, dass schon VANDIVER und KING (Amer. Math. Monthly *9*, 293–294 (1902)) die Unmöglichkeit der Gleichung der Aufgabe bewiesen haben. Allgemeiner hat HURWITZ (Math. Ann. *65*, 428–430 (1908)) gezeigt, dass $x^m y^n + y^m z^n + z^m x^n = 0$ dann und nur dann in ganzen Zahlen $\neq 0$ lösbar ist, wenn dies für $u^t + v^t + w^t = 0$ mit $t = m^2 - mn + n^2$ gilt.

Weitere Lösungen sandten L. CARLITZ (Durham, USA), W. JÄNICHEN (Berlin), W. WESSEL (Berlin).

Neue Aufgaben

Aufgabe 517. n, k, a, d seien natürliche Zahlen und es sei $(a, d) = 1$. Wieviele der n Zahlen $a + kd$, $0 \leqq k \leqq n - 1$ sind zu n teilerfremd?

W. JÄNICHEN, Berlin-Zehlendorf

Aufgabe 518. Prove that the expression

$$\frac{2\,(2x)!}{x!\,(x+3)!}$$

is an integer if $x = 6k + 2$ (k a positive integer) and $k \not\equiv 3 \pmod 5$.

C. KARANICOLOFF, Sofia

Aufgabe 519. Man beweise: Ist E eine projektive Ebene (wir verlangen nur, dass durch zwei verschiedene Punkte genau eine Gerade geht, zwei verschiedene Geraden stets einen Schnittpunkt haben und dass es vier Punkte in allgemeiner Lage gibt), sind P, Q zwei verschiedene Punkte und g, h zwei verschiedene Geraden von E mit $P \in h$, $P \notin g$ und $Q \in g$, $Q \notin h$, ist schliesslich β eine involutorische Streckung mit dem Zentrum P und der Achse g und γ eine involutorische Streckung mit dem Zentrum Q und der Achse h, so ist β die einzige involutorische Streckung mit dem Zentrum P und der Achse g.

H. LÜNEBURG, Mainz

Aufgabe 520. Es seien r_i die Anradien, r der Inradius, t_i die Winkelhalbierenden, s der halbe Umfang, F die Fläche eines Dreiecks. Man beweise

$$\sum_{i=1}^{3} r_i t_i \leqslant F\left[1 - \frac{38}{27}\left(\frac{s}{r}\right)^2 + \left(\frac{8}{27}\right)^2\left(\frac{s}{r}\right)^4\right]^{1/2}.$$

Gleichheit gilt nur für das gleichseitige Dreieck. (s/r ist minimal für das gleichseitige Dreieck.)

H. GUGGENHEIMER, University of Minnesota, USA

Aufgaben für die Schule

Es wird kein Anspruch auf Originalität der Aufgaben erhoben; Autoren und Quellen werden im allgemeinen nicht genannt. Die Daten für Aufgaben aus der Darstellenden Geometrie sind durchweg so festgelegt, dass der Ursprung des Koordinatensystems in der Mitte des linken Randes eines Blattes vom Format A4 gewählt werden soll, x-Achse nach rechts, y-Achse nach vorn, z-Achse nach oben, Einheit 1 cm. Anregungen und Beiträge sind zu senden an Prof. Dr. WILLI LÜSSY, Büelrainstrasse 51, Winterthur

1. ABC ist ein gleichschenkliges Dreieck. Um die Spitze C wird ein Kreis k mit beliebigem Radius geschlagen, von A und B werden die Tangenten an k gelegt. Der geometrische Ort der Schnittpunkte der Tangenten besteht aus einem Teil des Umkreises von $\triangle ABC$ und einem Teil der Mittelsenkrechten zur Basis AB.

2. Eine Hyperbel H besitzt die Scheitelpunkte $A_{1,2}(\pm a; 0)$ und die Brennpunkte $F_{1,2}(\pm c; 0)$. Sie ist mit einem Kreis k durch die Brennpunkte zu schneiden. Die folgende, sehr einfache Lösung von CATALAN (Mélanges mathématiques, 1876) ist anscheinend wenig bekannt: k schneide die y-Achse in M_1 und M_2. Die Strecke M_1F_1 schneidet die Scheiteltangente $x = a$ in U. Der Kreis u um M_1 durch U schneidet k im Hyperbelpunkt P (entsprechend für M_2).

   ▶ Ziehe die Brennstrahlen F_1P und F_2P. Sie berühren (siehe Aufgabe 1) einen Kreis v um M_1 in T_1 und T_2. $\overline{UV} = a$ sei das Lot von U auf die y-Achse. Man findet $\triangle M_1UV \cong \triangle M_1PT_1 \cong \triangle M_1PT_2$, demnach $PT_1 = PT_2 = a$. Aus Symmetriegründen ist $F_2P - a = F_1P + a$, folglich $F_2P - F_1P = 2a$.

3. Gleiche Bezeichnungen wie in Aufgabe 2. Wandert M_1 auf der y-Achse, schneidet man die Strecke M_1F_1 in U mit der Scheiteltangente, so hüllen die Kreise u die Hyperbel H ein.

   ▶ PM_2 halbiert den Winkel der Brennstrahlen, PM_1 ist folglich Normale von H in P. Der Beweis ist auch analytisch leicht zu führen, unabhängig vom Beweis der Aufgabe 2.

4. Zieht man die ausserordentlich schnell zu findenden Kreise u von Aufgabe 3 richtig nach Sichtbarkeit aus, so erhält man die Parallelprojektion eines einschaligen Rotationshyperboloids. Nimmt man als Projektionswinkel 45° an, so lautet seine Gleichung

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

   der erzeugende Meridian hat also die reelle Halbachse a und die imaginäre Halbachse c.

5. Zeichne die kleinste Kugel, die durch die Punkte A (8; 5; 2) und B (14; 10; 6) geht und die Aufrissebene berührt.

   ▶ M (12,3; 5,2; 4,5)