Über Kegelschnitte mit gemeinsamem Krümmungselement und Erzeugung von Steinerzykloiden

Autor(en): **Hoschek, J.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **21 (1966)**

Heft 2

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-24647

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.
Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

http://www.e-periodica.ch

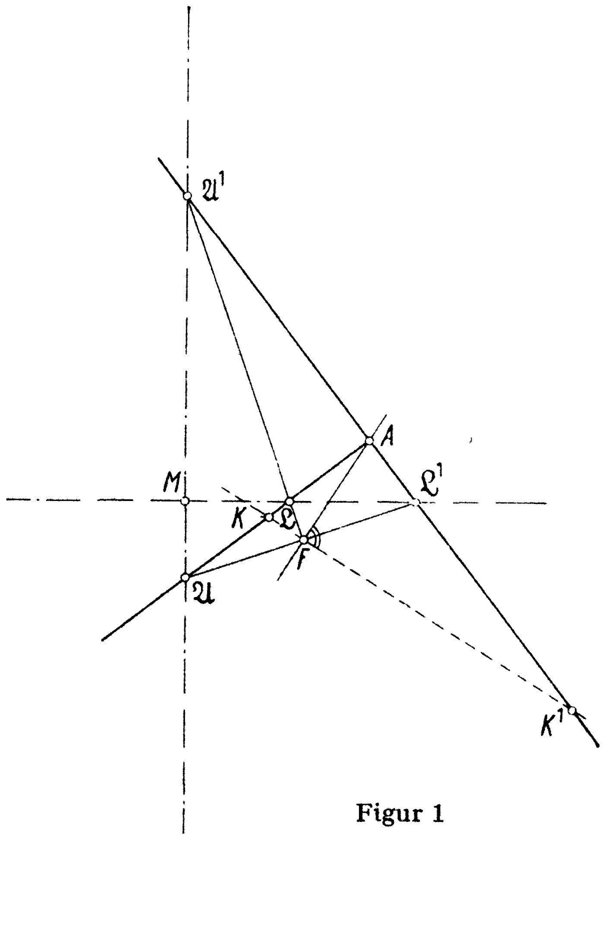
[5] MICHAEL GOLDBERG, *Rotors in Polygons and Polyhedra,* Mathematics of Computation *14,* 229–239 (1960).
[6] ERNST MEISSNER, *Über die Anwendung von Fourier-Reihen auf einige Aufgaben der Geometrie und Kinematik,* Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft, Zürich *54,* 309–329 (1909).

Über Kegelschnitte mit gemeinsamem Krümmungselement und Erzeugung von Steinerzykloiden

F. LAURENTI [3] [4] hat in zwei Untersuchungen gezeigt, dass die Achsen von Parabeln mit gemeinsamem Krümmungselement Steinerzykloiden als Hüllkurven besitzen. Dem analytischen Beweis von LAURENTI hat W. KICKINGER [2] eine synthetische Beweisführung gegenübergestellt, weiter lässt sich nachweisen [1], dass Ellipsen und Hyperbeln von konstantem Achsenverhältnis mit gemeinsamem Krümmungselement Steinerzykloiden als Hüllkurven ihrer Achsen besitzen. Diese letzte Aussage soll in der vorliegenden Untersuchung mit synthetischen Methoden bewiesen werden.

F. STEINER ([5], S. 205) hat folgende Konstruktion des Krümmungsmittelpunktes bei Kegelschnitten angegeben:

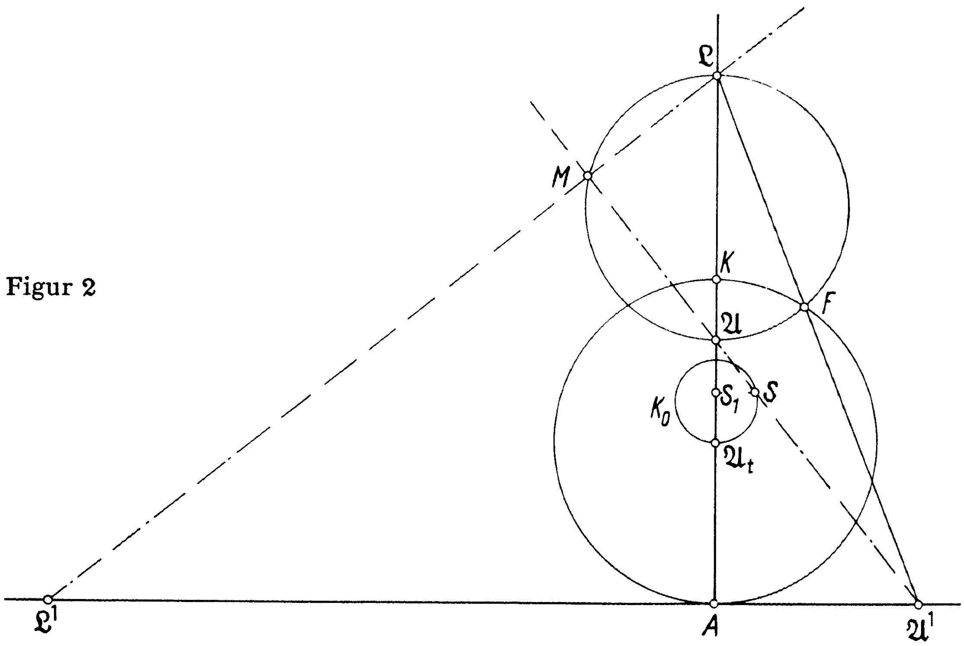
Treffen Tangente und Normale eines Punktes A eines Kegelschnitts die eine Achse desselben in $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}^1$, die andere in $\mathfrak{L}$ und $\mathfrak{L}^1$, errichtet man in dem Schnittpunkt $(\mathfrak{A}\,\mathfrak{L}^1, \mathfrak{A}^1\,\mathfrak{L}) = F$ auf der Geraden $A\,F$ die Senkrechte, so trifft dieselbe die Normale des Kegelschnitts in dem Krümmungsmittelpunkt.



Figur 1

Liegen Ellipsen vor, so ist K das Krümmungszentrum, werden Hyperbeln betrachtet, ist K^1 das Krümmungszentrum (siehe Figur 1). Die Achsen des Kegelschnitts werden dabei im Verhältnis $A\,\mathfrak{L}/A\,\mathfrak{A} = b^2/a^2 = \lambda^2 =$ const. geschnitten. Die Geraden $\mathfrak{A}^1 M$, $\mathfrak{L}^1 F$, $A\,\mathfrak{L}$ sind Höhen des Dreiecks $\mathfrak{L}^1\,\mathfrak{L}\,\mathfrak{A}^1$; der Mittelpunkt M des Kegelschnitts und der Punkt F liegen daher auf dem Thaleskreis über $\mathfrak{A}\,\mathfrak{L}$, der Punkt F bei Ellipsen ausserdem auf dem Thaleskreis über $K A$ bzw. bei Hyperbeln auf dem Thaleskreis über $K^1 A$, also im Schnitt der Kreise über $\mathfrak{A}\,\mathfrak{L}$ und $A\,K$ bzw. $A\,K^1$.

Durch Umkehr dieser Konstruktionsvorschrift von STEINER lässt sich eine Vorschrift $\mathfrak{B}$ gewinnen, welche die Achsen von Kegelschnitten von konstantem Achsenverhältnis λ^2 mit gemeinsamem Krümmungselement liefert. Wir beschränken uns zunächst auf Ellipsen (s. Figur 2):



Figur 2

Für alle Scharkurven ist der Kreis $K A$ fest, sein Durchmesser gleich dem Radius R des Krümmungselementes. Wegen $b^2/a^2 = A\,\mathfrak{L}/A\,\mathfrak{A} = \lambda^2$ kann $A\,\mathfrak{A}$ nur im Bereich $A\,K/\lambda^2 \leq A\,\mathfrak{A} \leq A\,K$ liegen, während gleichzeitig für $A\,\mathfrak{L}$ gilt $A\,K \leq A\,\mathfrak{L} \leq \lambda^2 A\,K$. Wählt man innerhalb dieser Bereiche einen Punkt $\mathfrak{A}$, so kann mit $\lambda^2\,A\,\mathfrak{L} = A\,\mathfrak{A}$ $\mathfrak{L}$ sofort bestimmt werden. Wird nun der Kreis über $\mathfrak{A}\,\mathfrak{L}$ gezeichnet, so erhält man als Schnittpunkt mit dem festen Kreis über $A\,K$ den Punkt F. Man ziehe jetzt die Gerade $\mathfrak{L}\,F$, ihr Schnittpunkt mit der Tangente t des Krümmungselementes sei $\mathfrak{A}^1$; der Schnitt der Geraden $\mathfrak{A}^1\,\mathfrak{A}$ mit dem Kreis über $\mathfrak{A}\,\mathfrak{L}$ sei M. Die Geraden $M\,\mathfrak{L}$ und $M\,\mathfrak{A}$ sind dann die gesuchten Achsen der Scharellipse, M ihr Mittelpunkt.

Nun muss noch gezeigt werden, dass die Geraden $M\,\mathfrak{L}$ bzw. $M\,\mathfrak{A}$ Steinerzykloiden einhüllen. Hat der Punkt $\mathfrak{A}$ seine tiefste Lage $\mathfrak{A}_t$ ($\mathfrak{A}_t\,\mathfrak{A} = R/\lambda^2$) eingenommen, liegt die Achse $M\,\mathfrak{A}$ parallel zur Elementtangente; ist $A\,\mathfrak{A} = A\,K$, so steht die Achse $M\,\mathfrak{A}$ senkrecht zur Elementtangente. Die gesuchte Hüllkurve muss daher in K eine Spitze, in $\mathfrak{A}_t$ einen Extremwert besitzen. Nun schneidet $M\,\mathfrak{A}$ den Kreis K_0 durch $\mathfrak{A}_t$ mit dem Radius $A\,K(\lambda^2 - 1)/4\,\lambda^2$ immer so, dass $A\,S_1 = (A\,K + \lambda^2\,A\,\mathfrak{A})/2\,\lambda^2$ ist, also S_1 die Strecke $\mathfrak{A}_t\,\mathfrak{A}$ halbiert. Damit ist aber schon gezeigt, dass die Hüllkurve der Geraden $M\,\mathfrak{A}$ eine Steinerzykloide ist, da auf der Gleichheit der Strecken $\mathfrak{A}\,S$ und $\mathfrak{A}_t\,S$ eine bekannte Konstruktion der Steinerzykloiden als Hüllgebilde von Geraden beruht (siehe zum Beispiel [6], Seite 180).

Analog kann der Beweis für die Gerade $M\,\mathfrak{L}$ bzw. für Hyperbeln mit gemeinsamem Krümmungselement geführt werden. Die hier angegebene Konstruktionsvorschrift $\mathfrak{V}$ dürfte wohl gleichzeitig eine bisher unbekannte Erzeugungsweise von Steinerzykloiden sein.

J. HOSCHEK, TH Darmstadt

LITERATURVERZEICHNIS

[1] J. HOSCHEK, *Über Kegelschnitte mit gemeinsamem Krümmungselement*, erscheint demnächst in Elemente der Mathematik.
[2] W. KICKINGER, *Einfacher Beweis eines Satzes von F. Laurenti über Parabeln mit gemeinsamem Krümmungselement*, Elemente der Mathematik *18*, S. 28–29, 1963.
[3] F. LAURENTI, *Sopra una proprietá dell'ipocicloide tricuspidata*, Periodico Mat. IV. Ser. *38*, 155–158, (1960).
[4] F. LAURENTI, *Sopra una proprietá dell'ipocicloide tricuspidata*, Archimede *12*, 253–256, (1960).
[5] J. STEINER, *Vorlesungen über synthetische Geometrie*, Leipzig 1898.
[6] H. SCHMIDT, *Ausgewählte höhere Kurven*, Wiesbaden 1949.

Über die Nichtprimteiler von $a\,b^x + c$

Die Primzahl p wird Primteiler der ganzwertigen Funktion $g(x)$ genannt, wenn die Kongruenz $g(x) \equiv 0 \pmod p$ eine ganzzahlige Lösung n mit $g(n) \neq 0$ hat. Ist die Kongruenz nicht lösbar, so heisst p Nichtprimteiler (NP) von $g(x)$.

PÓLYA [1] hat gezeigt, dass für ganze a, b, c mit $a\,c \neq 0$, $b \geqq 2$ die Funktion $g_0(x) = a\,b^x + c$ unendlich viele Primteiler besitzt. Für die NP von $g_0(x)$ gibt es keine so allgemeine Aussage. Beispielsweise sind nach dem Fermatschen Satz die Primteiler von b die einzigen NP von $b^x - 1$. Für die Existenz von unendlich vielen NP von $g_0(x)$ ist somit eine Zusatzbedingung notwendig, die im Fall $a = 1$ nach SCHINZEL [2] $-c \neq b^k$ lautet. Eine Aussage über die Form der NP gibt der

Satz 1. Ist $(a\,c, b) = 1$, $b \geqq 2$ und $|a\,c| \neq u^2$, so ist die Anzahl der NP von $a\,b^x + c$ in jeder der Restklassen $\pm 1 \pmod 4$ unendlich[1]).

Wird der Definitionsbereich von $g_0(x)$ auf die ungeraden Zahlen beschränkt, so gilt der

Satz 2. Ist $(a\,c, b) = 1$, $b \geqq 2$ und $b \neq b_1^2$, so ist die Anzahl der NP von $a\,b^{2x+1} + c$ in jeder der Restklassen $\pm 1 \pmod 4$ unendlich.

Ohne Einschränkung von b ist Satz 2 nicht richtig. Jede Primzahl $p \equiv 3 \pmod 4$ ist nämlich Primteiler von

$$4^{2x+1} - 1 = (2^{2x+1} + 1)\,(2^{2x+1} - 1) = (2^{(p-1)/2} + 1)\,(2^{(p-1)/2} - 1)\,.$$

Lemma 1. $p \neq 2$, $(p, a\,b\,c) = 1$, $(b/p) = 1$, $(-a\,c/p) = -1 \Rightarrow p = \text{NP}$ von $g_0(x)$.
Beweis indirekt (Kongruenzen mod p):

$$b \equiv b_0^2,\ a\,b^n + c \equiv 0 \Rightarrow a^2\,b_0^{2n} + a\,c \equiv 0,\ -a\,c \equiv (a\,b_0^n)^2,\ (-a\,c/p) = 1 \ \text{Widerspruch!}$$

---

[1]) Sind b und $a\,c$ Quadratzahlen, so ist (nach Lemma 1) *jedes* $a\,b\,c$ nicht teilende $p \equiv -1 \pmod 4$ ein NP von $g_0(x)$. Ist b ein Quadrat, so ist die Bedingung $(a\,c, b) = 1$ überflüssig, da Satz 1 sofort aus Lemma 1 und Lemma 3 folgt. Ebenso erhält man für $a\,c = u^2$ und beliebiges $b \geqq 2$ unendlich viele NP der Form $4m + 3$