Aufgaben

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **21 (1966)**

Heft 3

PDF erstellt am: **10.08.2024**

bei den Polynomen $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ und $x^2 + 1 = (x-i)(x+i)$ erzielt, durch Einführung einer uneigentlichen Seite d und Höhe h ein isomorpher Zerfall von sin- und tan-Bereich in Stücke und Formeln.

Der Beweis des Äquivalenzsatzes vereinfacht sich erheblich, wenn man Zeile 1) oder 1′) in der allgemeinen Gestalt $e^x\, e^y\, e^z\, e^t\, e^X\, e^Y\, e^Z\, e^T\, e^\xi\, e^\eta\, e^\zeta\, e^\vartheta$ etwa mit unbestimmten $x\,y\,z\,t$ schreibt. Unter Zuhilfenahme der beiden orthogonalen Matrizen

$$M = M^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad N = N^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

stösst man nämlich auf die beiden Sechserzyklen

$$\begin{aligned}
(\ x \quad y \quad z \quad t\ )\,M &= (\ X \quad Y \quad Z \quad T) \\
(\ X \quad Y \quad Z \ -T)\,M &= (\ \xi \quad \eta \quad \zeta \quad \vartheta) \\
(\ \xi \quad \eta \quad \zeta \ -\vartheta)\,M &= (-x \ -y \ -z \quad t\ ) \\[4pt]
(-x \ -y \ -z \ -t\ )\,M &= (-X - Y - Z \ - T) \\
(-X - Y - Z \quad T)\,M &= (-\xi \ -\eta \ -\zeta \ -\vartheta) \\
(-\xi \ -\eta \ -\zeta \quad \vartheta)\,M &= (\ x \quad y \quad z \ -t\ ) \\[4pt]
(\ x \quad y \quad z \quad t\ )\,N &= (\ \xi \quad \eta \quad \zeta \quad \vartheta) \\
(-\xi \ -\eta \ -\zeta \quad \vartheta)\,N &= (\ X \quad Y \quad Z \quad T) \\
(-X - Y - Z \quad T)\,N &= (\ x \quad y \quad z \ -t\ ) \\[4pt]
(-x \ -y \ -z \ -t\ )\,N &= (-\xi \ -\eta \ -\zeta \ -\vartheta) \\
(\ \xi \quad \eta \quad \zeta \ -\vartheta)\,N &= (-X - Y - Z \ - T) \\
(\ X \quad Y \quad Z \ -T)\,N &= (-x \ -y \ -z \quad t\ )\,,
\end{aligned}$$

und hierin stellen bereits die ersten 3 Zeilen den Beweis des Äquivalenzsatzes dar. – Offenbar gibt es beliebig viele additive und multiplikative Beispiele $x\,y\,z\,t\,X\,Y\,Z\,T\,\xi\,\eta\,\zeta\,\vartheta$ allein in der Dreieckslehre. Wir wählten 2 naheliegende multiplikative: den sin-Bereich und den tan-Bereich.

I. PAASCHE, München

Aufgaben

Aufgabe 501. Man bestimme den geometrischen Ort für das Zentrum einer räumlichen Inversion, welche drei gegebene Punkte in die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks abbildet.

C. BINDSCHEDLER, Küsnacht

Lösung: Es seien P_1, P_2, P_3 die gegebenen Punkte, P_1^*, P_2^*, P_3^* deren Bilder bei einer Inversion mit Zentrum M und Inversionsradius r, ferner $\overline{MP_i} = \varrho_i$, $\overline{MP_i^*} = \varrho_i^*$. Dann ist

$$\varrho_i^* = r^2\,\varrho_i^{-1}\,, \qquad i = 1, 2, 3. \tag{1}$$

Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke P_1MP_2 und $P_2^*\,MP_1^*$ folgt

$$\overline{P_1^*P_2^*} : \overline{P_1P_2} = \varrho_2^* : \varrho_1 = r^2 : \varrho_1\varrho_2\,. \tag{2}$$

Wegen der Forderung $\overline{P_1^*P_2^*} = \overline{P_2^*P_3^*} = \overline{P_3^*P_1^*}$ ergibt sich aus (2) $\overline{P_1P_2} : \varrho_1\varrho_2 = \overline{P_1P_3} : \varrho_1\varrho_3$ oder

$$\varrho_2 : \varrho_3 = \overline{P_1P_2} : \overline{P_1P_3} \text{ und entsprechend } \varrho_3 : \varrho_1 = \overline{P_2P_3} : \overline{P_2P_1}\,,\ \varrho_1 : \varrho_2 = \overline{P_3P_1} : \overline{P_3P_2}\,. \tag{3}$$

Die Verhältnisse der Entfernungen des Inversionszentrums M von den Ecken des Dreiecks $P_1P_2P_3$ sind also gegeben; M liegt auf drei «Apollonischen Kugeln». Da aus zwei der Bedingungen (3) die dritte folgt, haben diese drei Kugeln einen gemeinsamen Schnittkreis und damit auch eine gemeinsame Zentrale. Dieser Kreis, dessen Mittelpunkt auf jener Zentralen liegt und dessen Ebene zu ihr senkrecht steht, ist der gesuchte geometrische Ort.

W. JÄNICHEN, Berlin-Zehlendorf

Weitere Lösungen sandten G. GEISE (Dresden), K. SCHULER (Rottweil). und K. ZACHARIAS, (Berlin)

Aufgabe 502. Man bestimme die Zentren der Inversionen, welche vier gegebene Punkte des Raumes in die Ecken eines Parallelogramms abbilden.

C. BINDSCHEDLER, Küsnacht

Lösung des Aufgabenstellers: Liegen die gegebenen Punkte A_1, A_2, A_3, A_4 nicht auf einem Kreis oder auf einer Geraden, so sei K die durch sie gehende Kugel oder Ebene. Das gesuchte Inversionszentrum muss auf K liegen. Die Kreise (123) durch $A_1 A_2 A_3$ und (143) durch $A_1 A_4 A_3$ müssen in gleich grosse Kreise übergehen; ebenso (234) und (214). Die Oberfläche von K wird durch (123) und (143) in vier Zweiecke zerlegt, von denen genau eines auf seinem Rand die Punkte A_2 und A_4 enthält. Es sei C der Kreis auf K durch A_1 und A_3, der die Winkel dieses Zweiecks halbiert, und $\overline{C}$ der analoge Kreis für das Kreispaar (234), (214). Jeder der beiden Schnittpunkte von C und $\overline{C}$ kann als Inversionszentrum gewählt werden. Denn C und $\overline{C}$ werden durch eine solche Inversion in Geraden abgebildet, und die beiden Kreise eines Paares gehen in symmetrisch zu diesen Geraden liegende Kreise über. Das Viereck $A_1A_2A_3A_4$ geht über in ein solches mit gleichen Gegenwinkeln, also in ein Parallelogramm. Ist die Reihenfolge der Ecken nicht vorgeschrieben, so sind sechs Lösungen vorhanden, die alle reell sind (wie man erkennt, wenn man etwa A_4 als unendlich fernen Punkt wählt).

Liegen die gegebenen Punkte auf einem Kreis oder auf einer Geraden g und trennen sich die Paare A_1, A_3 und A_2, A_4, so schneiden sich die beiden zu g orthogonalen Kugeln, von denen die eine durch A_1, A_3, die andere durch A_2, A_4 geht, in einem Kreis C. Jeder Punkt von C kann als Inversionszentrum gewählt werden, da durch eine solche Inversion die Kugeln in Ebenen, also g in einen zu diesen orthogonalen Kreis, transformiert werden. Das Parallelogramm wird ein Rechteck. Trennen sich A_1, A_3 und A_2, A_4 nicht, so ist ein eigentliches Parallelogramm nicht möglich (wohl aber zwei «plattgedrückte» mit $\overrightarrow{A_1'A_2'} = -\overrightarrow{A_3'A_4'}$). Das Inversionszentrum muss dann auf g selbst liegen (je zwei Lösungen bei gegebener Reihenfolge der Ecken).

Eine weitere Lösung sandte K. ZACHARIAS (Berlin).

Aufgabe 503. Es sei

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^{n-1}, \quad b_1 = 1, \quad b_{n+1} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} b_k b_{n-k+1}.$$

Zeige, dass $f(z)$ auf der positiven reellen Achse eine singuläre Stelle hat.

J. H. VAN LINT, Eindhoven

Lösung: Die Reihe für $f(z)$ hat offenbar für reelle positive Werte von z lauter reelle positive Glieder. Ersetzt man b_n für $n > 1$ durch $c_n = 1/(n-1)$ bzw. durch $a_n = n/6^{n-1}$, so erhält man eine Majorante bzw. eine Minorante von $f(z)$. In der Tat ergibt sich aus $b_1 = c_1 = 1$ und der Induktionsannahme $b_i \leqq c_i \leqq 1$ $(i \leqq n)$ sofort $b_{n+1} \leqq n^{-2}\, n = c_{n+1}$. Ebenso erhält man aus $a_1 = b_1 = 1$ und $b_i \geqq a_i$ $(i \leqq n)$

$$b_{n+1} \geqq n^{-2} \sum_{k=1}^{n} k\,(n-k+1)\, 6^{1-n} = (n+1)\,(n+2)/n\, 6^n > (n+1)/6^n = a_{n+1}.$$

Für den Konvergenzradius r von $f(z)$ erhält man nun nach der Formel von CAUCHY-HADAMARD

$$\bigl(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_{n+1}}\bigr)^{-1} = 1 \leqq r \leqq 6 = \bigl(\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_{n+1}}\bigr)^{-1}.$$

H. MEILI, Winterthur

Eine weitere Lösung sandte W. SCHWARZ (Freiburg i. Br.).

Aufgabe 504. Est-il vrai que si n est un entier positif > 5, il existe au moins un entier positif $x < n$ tel que le nombre $x^2 + n$ est premier? (Cela est vrai pour $5 < n \leqq 100$). Sinon, trouver le plus petit entier $n > 5$ pour lequel un tel entier $x < n$ n'existe pas. (L'auteur de ce problème ne connait pas sa solution.) W. Sierpiński, Varsovie

Bemerkung: Die Vermutung ist richtig für $5 < n \leqslant 100000$. Für diese n gilt sogar, dass unter den Zahlen $x^2 + n$ mindestens eine Primzahl ist, wenn nur

$$1 \leqslant x \leqslant \min\left(n - 1, \sqrt{67108862 - n}\right).$$

(Rechenanlage Electrologica X1 der TH Braunschweig; Zeit: ca. 5 Stunden.)

H. Harborth, Braunschweig

Neue Aufgaben

Aufgabe 525. Die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks sind Zentren von drei gleichen Kreisen K_1, K_2, K_3 vom Radius r. Ein beliebiger Punkt P der Ebene des Dreiecks werde an K_1 nach P_1 gespiegelt, ebenso P_1 an K_2 nach P_2 und P_2 an K_3 nach P_3. Welches ist der geometrische Ort der Fixpunkte der Abbildung $P \to P_3$, wenn r variiert?

C. Bindschedler, Küsnacht

Aufgabe 526. Trouver tous les nombres premiers qui sont sommes de deux nombres tétraédraux (c'est-à-dire de la forme $T_n = n(n+1)(n+2)/6$, $n = 1, 2, \ldots$).

A. Schinzel, Varsovie

Aufgabe 527. Démontrer qu'il existe une infinité de nombres premiers qui ne sont pas sommes de deux nombres triangulaires (c'est-à-dire de la forme $t_n = n(n+1)/2$, $n = 1, 2, \ldots$). W. Sierpiński, Varsovie

Aufgabe 528. Man zeige, dass die Koeffizienten a_n der Potenzreihenentwicklung von

$$\frac{-x}{(1-x)\log(1-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

asymptotisch durch $1/\log n + O(1/\log^2 n)$ gegeben sind. Günter Bach, Braunschweig

Aufgaben für die Schule

Es wird kein Anspruch auf Originalität der Aufgaben erhoben; Autoren und Quellen werden im allgemeinen nicht genannt. Die Daten für Aufgaben aus der Darstellenden Geometrie sind durchweg so festgelegt, dass der Ursprung des Koordinatensystems in der Mitte des linken Randes eines Blattes vom Format A4 gewählt werden soll, x-Achse nach rechts, y-Achse nach vorn, z-Achse nach oben, Einheit 1 cm. Anregungen und Beiträge sind zu senden an Prof. Dr. Willi Lüssy, Büelrainstrasse 51, Winterthur

1. Beweise die Identität

$$\frac{a+x}{x(x-y)(x-z)} + \frac{a+y}{y(y-z)(y-x)} + \frac{a+z}{z(z-x)(z-y)} = \frac{a}{x\,y\,z}.$$

2. Eliminiere x und y aus

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = a \\ x^2 + y^2 = b \\ x + y = c \end{cases}$$

▶ $2a - 3bc + c^3 = 0$.

3. Zeige, dass die Gleichung

$$16 x^4 + 8 x^3 - 12 x^2 - 8 x - 1 = 0$$

eine Lösung $x = \cos 20°$ besitzt.

▶ Benütze die Identität $\cos 3\alpha = 4 \cos^3\alpha - 3 \cos\alpha$.

4. Die Gleichung

$$2^x + 2^y = n\,!$$

ist in ganzen positiven Zahlen zu lösen.

▶ Die einzigen Lösungen sind

$$4 + 2 = 3\,! \quad \text{und} \quad 16 + 8 = 4\,!$$

Für $n > 4$ enthält $n\,!$ den Faktor 15; $2^x + 2^y = 2^p (2^q + 1)$ ist aber nicht durch 15 teilbar.

5. Ein Züchter verkauft Kaninchen, so viele Tiere, als das Tier Franken kostet. Den Erlös teilt er so unter seine zwei Söhne, dass zunächst der ältere zehn Franken erhält, dann der jüngere, dann wieder der ältere, und so weiter. Am Schluss bleibt für den jüngeren ein Rest von weniger als zehn Franken. Da nimmt der Vater einen Ring vom Finger, legt ihn zu diesem Rest und erklärt, nun hätten beide gleich viel. Wie wurde der Wert des Rings eingeschätzt?

▶ Vier Franken. Alle Quadratzahlen mit ungerader Zehnerziffer enden mit 6.

Literaturüberschau

The Open Mapping and Closed Graph Theorems in Topological Vector Spaces. Par TAQDIR HUSAIN. X et 108 pages. DM 19.80. Friedr. Vieweg und Sohn, Braunschweig 1965.

Il s'agit d'une monographie traduite en anglais par l'auteur et couronnée d'un prix par la maison d'Edition Vieweg à l'occasion de son jubilée. La monographie est consacrée à trois résultats fondamentaux de l'Analyse fonctionnelle, notamment les théorèmes des applications ouvertes et des graphes fermés, ainsi que le théorème de KREIN-SMULIAN.

Les deux premiers chapitres de cette monographie donnent un aperçu des notions fondamentales sur les espaces vectoriels et topologiques et citent, sans démonstration, les principaux théorèmes concernant les espaces vectoriels topologiques.

La monographie proprement dite comprend les chapitres 3–7, dont les deux derniers contiennent d'intéressants résultats obtenus par M. T. HUSAIN. Une notice historique constitue le huitième chapitre et la monographie est complétée par une abondante bibliographie et un indexe des symboles et des termes employés. S. PICCARD

The Theory of Group Representations. Par FRANCIS D. MURNAGHAN. XI et 369 pages. $ 2.35. Dover Publications, New York 1964.

Les éditions Dover ont réimprimé, après correction, l'intéressant ouvrage de M. MURNAGHAN paru en première édition chez Johns Hopkins Press en 1938.

L'auteur donne un aperçu élémentaire de la théorie de la représentation des groupes, théorie dans le développement de laquelle FROBENIUS, SCHUR et WEYL ont joué un rôle capital. L'auteur accorde une large place au groupe symétrique et au groupe de rotation qui jouent un rôle fondamental en mécanique quantique. Il s'arrête longuement à la théorie d'intégration des groupes, aux représentations du groupe symétrique, des groupes cristallographiques, du groupe de LORENTZ, etc.

L'ouvrage se compose de douze chapitres. Il se termine par quatre pages de bibliographie et un copieux index. L'auteur s'attache surtout à la représentation de divers groupes par des groupes linéaires dont les éléments sont des matrices carrées de même ordre $n \geqslant 1$, formées de nombres complexes et dont la loi de composition est la multiplication matricielle.