Aufgaben

Aufgabe 505. Es sei I der Inkreismittelpunkt des Dreiecks ABC. Befindet sich I auf der Eulerschen Geraden, so ist das Dreieck gleichschenklig.

ESTHER SZEKERES, Sydney/Australien

Lösung: Es seien O und J Um- und Inkreiszentrum, S der Schwerpunkt des Dreiecks, M_1 und M_2 die Mitten der Seiten A_2A_3 und A_3A_1, ferner D_1 und D_2 die zweiten Schnittpunkte der Winkelhalbierenden A_1J und A_2J mit dem Umkreis. Die Geraden M_1D_1, M_2D_2 und (nach Voraussetzung) SJ gehen durch O. Die Dreiecke M_1M_2S und D_1D_2J sind also perspektiv. Wir nehmen an, dass homologe Geraden (wie M_1S und D_1J, das heisst eine Schwerlinie und eine Winkelhalbierende des gegebenen Dreiecks) nicht zusammenfallen (andernfalls wäre das Dreieck schon deshalb gleichschenklig und nichts mehr zu beweisen). Dann ist aber A_1A_2 die Desarguessche Gerade der perspektiven Dreiecke. Wegen $M_1M_2 \parallel A_1A_2$ ist dann auch $D_1D_2 \parallel A_1A_2$. Daraus folgt die Gleichheit der Bogen $\widehat{A_1A_3}$ und $\widehat{A_2A_3}$ und damit auch der Seiten $\overline{A_1A_3}$ und $\overline{A_2A_3}$. C. BINDSCHEDLER, Küsnacht

Herr W. JÄNICHEN (Berlin-Zehlendorf) weist darauf hin, dass die Aussage der Aufgabe auch gilt, wenn der Inkreismittelpunkt durch einen der Ankreismittelpunkte ersetzt wird.

Weitere Lösungen (meistens durch Rechnung) sandten B. ANDERSEN (Hillerød), W. I. BLUNDON (Memorial Univ. of Newfoundland), H. FRISCHKNECHT (Berneck), H. GAEBELEIN (Helmstedt), L. KIEFFER (Luxemburg), F. LEUENBERGER (Feldmeilen), I. PAASCHE (München), O. REUTTER (Ochsenhausen), K. SCHULER (Rottweil).

Aufgabe 506. $y = y(x)$ sei eine in der Umgebung U des Nullpunktes beliebig oft differenzierbare Funktion. $y(0) = 0$, $y'(0) \neq 0$ werde vorausgesetzt. Man zeige, dass dann für alle $n = 1, 2, 3, \ldots$ gilt

$$\left\{\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left[\frac{x}{y(x)}\right]^n\right\}_{x=0} = \left\{\left[\frac{d}{y'(x)\,dx}\right]^n x\right\}_{x=0} = \left\{\frac{d^n}{dy^n}\,x(y)\right\}_{y=0},$$

wobei $x(y)$ die zu $y(x)$ inverse Funktion ist. G. BACH, Braunschweig

Lösung des Aufgabenstellers: Wir setzen voraus, dass $y(x)$ in U in eine konvergente Taylorreihe entwickelbar ist. Dann lässt sich $y(x)$ ins Komplexe fortsetzen und als eine an der Stelle $x = 0$ regulär analytische Funktion der komplexen Veränderlichen x ansehen, die wegen $y'(0) \neq 0$ in einer hinreichend kleinen Umgebung des Punktes $x = 0$ schlicht ist. Wir können also einen Kreis K um $x = 0$ so finden, dass $y(x)$ innerhalb und auf K analytisch ist und auf der abgeschlossenen Kreisscheibe K keinen Wert mehr als einmal annimmt. Dann ist das Bild des Randes R von K eine einfach geschlossene Kurve R' in der komplexen y-Ebene um den Nullpunkt.

Nach CAUCHY hat man

$$\left\{\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left[\frac{x}{y(x)}\right]^n\right\}_{x=0} = \frac{(n-1)!}{2\pi i}\int\limits_R \left[\frac{x}{y(x)}\right]^n \frac{dx}{x^n} = \frac{(n-1)!}{2\pi i}\int\limits_R \frac{dx}{[y(x)]^n}.$$

Analog für die Umkehrfunktion

$$\left\{\frac{d^n}{dy^n}\,x(y)\right\}_{y=0} = \frac{n!}{2\pi i}\int\limits_C x(y)\,\frac{dy}{y^{n+1}},$$

wobei C als geschlossene Kurve um den Nullpunkt der y-Ebene so gewählt werden muss, dass $x(y)$ innerhalb und auf C eine reguläre Funktion von y ist. Nach den oben angestellten Überlegungen ist R' eine solche Kurve, mit $C = R'$ kommt dann

$$\left\{\frac{d^n}{dy^n}\,x(y)\right\}_{y=0} = \frac{n!}{2\pi i}\int\limits_{R'} x(y)\,\frac{dy}{y^{n+1}} = \frac{n!}{2\pi i}\int\limits_R x\,\frac{y'(x)\,dx}{[y(x)]^{n+1}}$$

$$= -\frac{(n-1)!}{2\pi i}\int\limits_R x\,d\left(\frac{1}{[y(x)]^n}\right) = \frac{(n-1)!}{2\pi i}\int\limits_R \frac{dx}{[y(x)]^n}$$

(durch partielle Integration). Damit ist alles gezeigt.

Aufgabe 507. Man beweise: Ist R die reelle affine Ebene und P eine endliche Punktmenge von R und treffen alle Geraden und alle Kreise von R, die P in drei Punkten treffen, P sogar in vier Punkten, so sind die Punkte von P entweder kollinear oder konzyklisch.
HEINZ LÜNEBURG, Mainz

Lösung: Wir projizieren P stereographisch auf eine Kugel und führen den Beweis indirekt. Wir nehmen also an, dass die Bildmenge P' nicht koplanar ist. Die Punkte von P' bilden dann die Ecken eines konvexen, der Kugel einbeschriebenen Polyeders, dessen Seitenflächen Kreisvierecke oder -vielecke sind. Nach Voraussetzung enthält jede Ebene durch drei Ecken mindestens eine weitere Ecke.

Es seien e, f, k die Anzahlen der Ecken, Flächen und Kanten des Polyeders. Dann ist $k \geqq 4\,f/2 = 2\,f$. Andererseits stossen in jeder Ecke mindestens 4 Kanten zusammen, denn sonst gäbe es Ebenen, die nur 3 Ecken des Körpers enthielten. Es ist also $k \geqq 4\,e/2 = 2\,e$. Damit wird $e + f \leqq k$ im Widerspruch zur Eulerschen Gleichung.
C. BINDSCHEDLER, Küsnacht

Die Lösung des Aufgabenstellers benutzt die bekannte Tatsache, dass die Punkte einer endlichen Punktmenge der reellen Ebene kollinear sind, wenn jede Gerade durch zwei der Punkte einen dritten enthält.

Aufgabe 494 (vgl. El. Math. *21*, 18 (1966)). *Dritte Lösung:* Ist x ein Punkt der geschlossenen konvexen Kurve (über die man keine Differenzierbarkeitsvoraussetzungen machen muss), y ein Vektor parallel zu einer Stützgeraden durch x und h der Stützabstand zum Punkte x, so erhält man durch Betrachtung der entsprechenden Flächeninhalte unmittelbar $\det(x, y) = h \,\|\, y \,\|$. Bezeichnen wir die entsprechenden Grössen im Bild mit grossen Buchstaben, so ist ebenso $\det(X, Y) = H \,\|\, Y \,\|$, und es folgt sofort, wenn n das Affinitätsverhältnis und $\lambda = \|\, Y \,\|/\|\, y \,\|$ ist, $H : h = n : \lambda$.
E. HEIL, Darmstadt

Neue Aufgaben

Aufgabe 529. Um je zwei zueinander orthogonale Kreise eines elliptischen Kreisbüschels werden die gemeinsamen Tangenten gelegt. Welches ist die Enveloppe dieser Tangentenpaare?
C. BINDSCHEDLER, Küsnacht

Aufgabe 530. In der Ebene eines Dreiecks werden zwei Punkte beliebig so gewählt, dass keiner von ihnen auf einer Dreiecksseite liegt. Man zeige, dass die sechs Fusspunkte der Ecktransversalen durch die beiden Punkte auf einem Kegelschnitt liegen.
J. SCHOPP, Budapest

Aufgabe 531. Démontrer que, pour n naturel, la condition que le nombre $2^n + 1$ soit premier n'est pas ni nécessaire ni suffisante pour que le nombre $2^{2^n} + 1$ soit premier (contrairement à ce qu'écrit M. H. VARCOLLIER à la page 15 de son livre *Nombres premiers, nombres avant-premiers*, Presses Universitaires de France, 1965).
W. SIERPIŃSKI, Varsovie

Aufgabe 532. Die multiplikative Gruppe der zweireihigen quadratischen Matrizen mit *komplexen* Elementen und nichtverschwindender Determinante ist bekanntlich isomorph zu einer Untergruppe der Gruppe der vierreihigen quadratischen Matrizen mit *reellen* Elementen und nichtverschwindender Determinante. Man zeige, dass dasselbe gilt, wenn man die komplexen Zahlen durch Dualzahlen $a + b\,\varepsilon$ ($\varepsilon^2 = 0$) ersetzt.
G. KIRSCHMER, München

Aufgaben für die Schule

Es wird kein Anspruch auf Originalität der Aufgaben erhoben; Autoren und Quellen werden im allgemeinen nicht genannt. Die Daten für Aufgaben aus der Darstellenden Geometrie sind durchweg so festgelegt, dass der Ursprung des Koordinatensystems in der Mitte des linken Randes eines Blattes vom Format A4 gewählt werden soll, x-Achse nach rechts, y-Achse nach vorn, z-Achse nach oben, Einheit 1 cm. Anregungen und Beiträge sind zu senden an Prof. Dr. WILLI LÜSSY, Büelrainstrasse 51, Winterthur

1. Konstruiere ein Dreieck ABC aus der Seite a, der Summe $b + c = q$ und der Winkelhalbierenden $w_\alpha = AD$.

▶ Da mit a und q der Umfang bekannt ist, liegt es nahe, den Inkreis des Dreiecks mit dem Zentrum M und dem Berührungspunkt M' auf AB sowie den Ankreis an a mit dem Zentrum Z und dem Berührungspunkt Z' auf AB zu betrachten. Es ist

$$AZ' = \frac{q+a}{2}, \qquad AM' = \frac{q-a}{2}.$$

D' sei die Projektion von D auf AB. A und D sind die Ähnlichkeitszentren der beiden Kreise, $A, D; M, Z$ bilden also eine harmonische Punktgruppe, folglich auch $A, D'; M', Z'$. D' ist konstruierbar und die Aufgabe leicht fertig zu lösen.

2. Auf einem Durchmesser des Kreises $k(R)$ mit dem Zentrum M sind zwei Punkte A und B gegeben. Durch A und B sind zwei gleichlange Sehnen zu legen, die von einem Punkt P auf k ausgehen.

▶ PM halbiert den Winkel der Sehnen, das Verhältnis der Sehnenabschnitte PA und PB ist bekannt, also Lösung mittels des Kreises von Apollonius. Der zu M bezüglich A, B harmonische Punkt muss ausserhalb k liegen, wenn die Aufgabe lösbar sein soll, woraus sich die Bedingung

$$\frac{1}{MA} + \frac{1}{MB} \leqq \frac{2}{R}$$

ergibt.

3. In einem rechtwinkligen Dreieck wird die Halbierende des rechten Winkels gezogen. Die Inkreisradien der entstehenden Teildreiecke seien ϱ_1 und ϱ_2. Man konstruiere das Dreieck aus dem Verhältnis $\varrho_1 : \varrho_2$ und dem Abstand d der Kreismittelpunkte.

▶ Sind D und E die Zentren der Inkreise, so ist vom Dreieck DEA die Grundlinie d und das Verhältnis der Seiten $AD : AE = \varrho_1 : \varrho_2$ gegeben. Je nach Wahl des Verhältnisses $\varrho_1 : \varrho_2$ sind die Bedingungen der Aufgabe für die innere oder für die äussere Winkelhalbierende erfüllt.

4. Man konstruiere ein Sehnen-Tangentenviereck $ABCD$, von dem der Umkreis k und die Seiten $AB = a$, $AD = b$ $(a < b)$ gegeben sind.

▶ 1. Lösung: C liegt auf der Hyperbel mit den Brennpunkten B, D und der Abstandsdifferenz $b - a$. Der Schnittpunkt von k und der Hyperbel kann nach Aufgabe 2, El. Math. *21*, 20 (1966) leicht gefunden werden.

2. Lösung: Sei E der Schnittpunkt von DC mit dem Kreis um D und dem Radius $b - a$. Dann ist $\sphericalangle DEB = 180° - \alpha/2$.

5. Gegeben sind ein Kreis k und zwei Punkte A und B. Man konstruiere auf k einen Punkt X so, dass die durch die Geraden AX und BX bestimmte Sehne ein Maximum oder ein Minimum wird.

▶ Zum Minimum gehört der kleinste, zum Maximum der grösste Peripheriewinkel bei X. X ist also der Berührungspunkt des Kreises durch A und B, der k berührt.

Literaturüberschau

Schülerversuche zur Elektrizitätslehre für höhere Schulen. Von P. Bächtiger. Heft 3 der Einzelschriften zur Gestaltung des mathematisch-physikalischen Unterrichts. 78 Seiten mit 29 Skizzen. Fr. 9.80. Räber Verlag, Luzern und Stuttgart 1965.

Bestimmt bedarf kein Kapitel der Physik so sehr der Untermauerung durch ein physikalisches Praktikum wie gerade die Elektrizitätslehre. Es ist deshalb sicher richtig, dass in der Sammlung «Einzelschriften zur Gestaltung des mathematisch-physikalischen Unterrichts» schon das Heft 3 sich mit diesem Problem befasst. Dr. P. Bächtiger erweist sich als guter Pädagoge, indem er nicht einfach eine Anzahl Praktikumsexperimente beschreibt, sondern er stellt dem Schüler die Aufgabe und gibt ihm die vorhandenen experi-