Kleine Mitteilungen

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **21 (1966)**

Heft 6

PDF erstellt am: **10.08.2024**

Kleine Mitteilungen

Eine Verallgemeinerung des Homomorphiesatzes[1])

Es soll in dieser Note ein Isomorphiesatz für Gruppen mitgeteilt werden, der eine nützliche Verallgemeinerung des Homomorphiesatzes ([1], S. 39) darstellt aber in den Lehrbüchern der Gruppentheorie anscheinend nicht anzutreffen ist. Wir setzen lediglich die Grundbegriffe der Gruppentheorie voraus, insbesondere den Begriff des Normalteilers und den der Faktorgruppe.

Verallgemeinerter Homomorphiesatz

Es seien $\sigma\colon G \to G'$ ein Homomorphismus der Gruppen G, G' und M ein Normalteiler von G'; man setze $K := \sigma^{-1}(M)$. Ist L ein Normalteiler von G, so besteht ein kanonischer Isomorphismus

$$G/LK \cong G^\sigma M/L^\sigma M\,.$$

Zur Bezeichnung ist zu sagen, dass statt $\sigma(a)$ für $a \in G$, a^σ geschrieben wird. Dann ist $\sigma(a^{-1}) = (a^{-1})^\sigma = (a^\sigma)^{-1}$ und G^σ bedeutet natürlich $\sigma(G)$.

Beweis. Zunächst ist K ein Normalteiler in G; dann gilt $LK = KL$ und somit ist LK sogar ein Normalteiler in G. Ebenso ist L^σ ein Normalteiler in G^σ und sodann ist $L^\sigma M$ ein Normalteiler in $G^\sigma M$. Der einfache Nachweis dieser Aussagen sei dem Leser überlassen. Die Faktorgruppen G/LK und $G^\sigma M/L^\sigma M$ sind also definiert.

Die naheliegende Zuordnung

$$a\,LK \to a^\sigma\,L^\sigma M \quad \text{für jedes } a \in G\,,$$

ist nun tatsächlich ein kanonischer Isomorphismus von G/LK auf $G^\sigma M/L^\sigma M$.

Zunächst ist zu zeigen, dass diese Zuordnung eindeutig ist d.h. ist $a\,LK = b\,LK$ so muss auch $a^\sigma\,L^\sigma M = b^\sigma\,L^\sigma M$ sein. Das ist aber wegen $K^\sigma \subset M$ offensichtlich der Fall. Die Zuordnung ist also eine wohldefinierte Abbildung von G/LK in $G^\sigma M/L^\sigma M$. Sie ist ein Gruppenhomomorphismus, denn es ist für alle $a, b \in G$

$$a\,b\,LK = (a\,LK)\,(b\,LK) \to (a^\sigma\,L^\sigma M)\,(b^\sigma\,L^\sigma M) = a^\sigma\,b^\sigma\,L^\sigma M = (a\,b)^\sigma\,L^\sigma M\,.$$

Die Abbildung ist injektiv d.h. ist $a^\sigma\,L^\sigma M = b^\sigma\,L^\sigma M$, so ist auch $a\,LK = b\,LK$. Dies ist wiederum wegen $\sigma^{-1}(M) = K$ natürlich der Fall.

Schliesslich ist der Homomorphismus auch surjektiv, denn eine beliebige Nebenklasse in $G^\sigma M$ nach $L^\sigma M$ hat ja die Form $a'\,L^\sigma M$ mit $a' \in G^\sigma M$ also $a' = a^\sigma\,b'$ wobei $a \in G$, $b' \in M$. Dann ist $a'\,L^\sigma M = a^\sigma\,b'\,L^\sigma M = a^\sigma\,L^\sigma(b'\,M) = a^\sigma\,L^\sigma M$; somit tritt das gegebene Element $a'\,L^\sigma M$ von $G^\sigma M/L^\sigma M$ als das Bild des Elements $a\,LK$ von G/LK bei der obigen Abbildung auf.

Damit ist der Satz bewiesen.

Korollar 1 (*Homomorphiesatz* [1], S. 39)

Es sei $\sigma\colon G \to G'$ ein Homomorphismus der Gruppen G, G'; es sei N der Kern des Homomorphismus σ d.h. $N := \sigma^{-1}(e')$ wobei e' das Einselement von G' bezeichnet.

Dann besteht ein kanonischer Isomorphismus $G/N \cong G^\sigma$.

Beweis. Setze $M := \{e'\}$ und $L := \{e\}$, wo e das Einselement von G sei; dann ist $K = N$, $LK = N$, $L^\sigma M = \{e'\}$ und $G^\sigma M = G^\sigma$. Der bewiesene Satz liefert den kanonischen Isomorphismus $a\,N \to a^\sigma\{e'\}$ von G/N auf $G^\sigma/\{e'\}$. Es ist aber $G^\sigma/\{e'\}$ vermöge der trivialen

[1]) Eine kürzere Darstellung dieses Satzes, ohne die Korollare, ist im Nieuw Archief voor Wiskunde (3) *14*, 102 (1966) erschienen.

Abbildung $a^\sigma\{e'\} \to a^\sigma$ mit G^σ kanonisch isomorph. Durch Hintereinanderausführen dieser beiden Abbildungen erhält man $a\,N \to a^\sigma$ als den kanonischen Isomorphismus von G/N auf G^σ.

Setzt man aber den Homomorphiesatz als bekannt voraus, so folgt der allgemeine Satz daraus relativ schnell, indem man LK als den Kern des Homomorphismus $a \to a^\sigma L^\sigma M$ $(a \in G)$ von G auf $G^\sigma M/L^\sigma M$ erkennt.

Korollar 2 (*Erster Isomorphiesatz*, [1], S. 150)

Es seien G eine Gruppe, N ein Normalteiler von G und H eine beliebige Untergruppe von G. Dann besteht ein kanonischer Isomorphismus

$$H/H \cap N \cong HN/N\,.$$

Beweis. In der Bezeichnung des Satzes sei $G := H$, $G' := G$ und es sei σ: $H \to G$ die natürliche Injektion d.h. $a^\sigma = a$ für jedes $a \in H$. Man setze weiter $M := N$, $L := \{e\}$. Dann ist offenbar $K = \sigma^{-1}(N) = H \cap N$ und $G^\sigma M = HN$, $LK = H \cap N$, $L^\sigma M = N$. Die Behauptung folgt somit aus dem Satz; der kanonische Isomorphismus ist dabei

$$a\,H \cap N \to a\,N, \quad a \in H\,.$$

Korollar 3 (*Zweiter Isomorphiesatz*, [1], S. 151)

Es seien G eine Gruppe und H, N zwei Normalteiler von G mit $H \supset N$. Dann ist H/N ein Normalteiler in G/N und es besteht ein kanonischer Isomorphismus

$$G/H \cong (G/N)/(H/N)\,.$$

Beweis. Dass H/N ein Normalteiler in G/N ist, ist klar. Man setze $G' := G/N$ und wähle als σ: $G \to G/N$ den natürlichen Homomorphismus $a \to a\,N$ von G auf G/N. Sodann sei $M := H/N$, $L := \{e\}$. Dann ist offenbar $K = \sigma^{-1}(H/N) = H$, $LK = H$, $L^\sigma M = H/N$ und $G^\sigma M = (G/N)\,(H/N) = G/N$; damit folgt die Behauptung aus dem Satz.

M. R. CHOWDHURY, Göttingen

LITERATURVERZEICHNIS

[1] B. L. VAN DER WAERDEN, *Algebra*, Teil I, 5. Auflage, Springer-Verlag 1960.

Aufgaben

Aufgabe 513. If

$$N = \frac{x^2 - 6\,x\,y + y^2}{x^2 - 10\,x\,y + y^2}\,,$$

where x, y are integers not both zero, N a positive integer, then N is representable in the forms

$$s^2 + (s+1)^2 \text{ and } 2\,r^2 + (r \pm 1)^2\,.$$

M. N. KHATRI, Bhilupur/India, A. MAKOWSKI, Warszawa/Poland

Solution: Rewrite the equation

$$N\,(x^2 - 10\,x\,y + y^2) = x^2 - 6\,x\,y + y^2 \qquad (1)$$

in the form

$$(N-1)\,x^2 - 2\,(5\,N-3)\,x\,y + (N-1)\,y^2 = 0\,.$$

The latter equation has non-trivial solutions x, y provided

$$(5\,N-3)^2 - (N-1)^2 = m^2\,,$$