Klassische und moderne Axiomatik

Autor(en): **Waerden, B.L. van der**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **22 (1967)**

Heft 1

PDF erstellt am: **10.08.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-25348

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts

Publiziert mit Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds
zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung

El. Math. Band XXII Heft 1 Seiten 1–24 10. Januar 1967

Klassische und moderne Axiomatik

Diskussionen über die Rolle der Axiomatik im Schulunterricht werden nach meiner Erfahrung sehr erschwert durch häufig auftretende Missverständnisse. Es gibt zwei Arten von Axiomsystemen, die didaktisch völlig verschiedene Funktionen erfüllen und zwischen denen man gleich am Anfang der Diskussion sauber unterscheiden sollte.

Die eine Art will ich *klassische Axiomatik* nennen. Sie wurde von EUKLEIDES in seinen «Elementen» und von NEWTON in seinem Hauptwerk «Principia» verwendet. Zwei Merkmale sind für diese klassische Axiomatik charakteristisch:

1. Die Gegenstände, auf die sich die klassischen Axiome beziehen, sind von vornherein bestimmt und bekannt. Bei EUKLEIDES sind es Figuren im Raum, bei NEWTON sich bewegende Körper, die Kräfte aufeinander ausüben.

Die Frage, ob diese Gegenstände als sichtbar und greifbar oder als idealisierte Gegenstände aufzufassen sind, lassen wir lieber beiseite, weil sie in unseren beiden Standardbeispielen verschieden zu beantworten ist. Für PLATON und die griechischen Mathematiker ist ein Punkt ein idealer Gegenstand, der «keine Teile hat», während greifbare Objekte immer Teile haben. NEWTON dagegen redet von materiellen Körpern; er wendet seine Axiome ja nachher auf die Erde, den Mond und die Planeten an. Allerdings betrachtet NEWTON auch punktförmige Körper.

Worauf es ankommt, ist vielmehr, dass bei NEWTON wie bei EUKLEIDES nicht von irgendwelchen abstrakten «Räumen» die Rede ist, sondern nur von *dem Raum* und dass *der Raum* mit allen seinen Punkten, Geraden usw. von Anfang an, d.h. noch bevor die Axiome aufgestellt werden, beim Leser als bekannt angenommen wird.

Genau das ist auch die Situation, von der wir beim Schulunterricht auszugehen haben. Der Schüler kann sich Punkte, Geraden, Kugeln usw. vorstellen: sonst würde er den Geometrieunterricht überhaupt nicht verstehen. Diese vorhandenen Vorstellungen werden vom Lehrer vielleicht noch etwas präzisiert, indem er erklärt, dass ein Punkt nicht etwa ein ausgedehnter Kreideklecks ist und dass man sich eine Gerade nicht als begrenzte Strecke, sondern nach beiden Seiten unendlich vorzustellen hat. Von «Räumen» im modernen, abstrakten Sinn kann der Lehrer, wenn überhaupt, erst in einem viel späteren Stadium reden.

2. Das zweite Merkmal der klassischen Axiomatik ist, dass derjenige, der die Axiome aufstellt, sie für wahr hält. NEWTON hielt die Mechanik des ARISTOTELES für falsch und die eigene für richtig. Die Griechen haben die Sätze der Euklidischen Geometrie in Verbindung mit der Hypothese, dass Lichtstrahlen und Sehstrahlen geradlinig sind, unbedenklich auf Probleme der Optik, Astronomie und Mechanik angewandt; sie hielten jene Sätze offenbar für richtig. Auch wir halten die Newtonsche Mechanik in Verbindung mit der Euklidischen Geometrie in einer für alle praktischen Anwendungen genügenden Genauigkeit für richtig; wir können also mit gutem Gewissen die Sätze der Geometrie und Mechanik unseren Schülern als wahre Aussagen anbieten. Das heisst: Wir können, wenn wir wollen, uns auf den Standpunkt der klassischen Axiomatik stellen.

Die *moderne Axiomatik* unterscheidet sich von der klassischen dadurch, dass die Gegenstände, von denen die Rede ist, beliebig gewählt werden können, sofern sie nur die Axiome erfüllen. Jede Struktur, die die Gruppenaxiome erfüllt, ist eine Gruppe. Die Gegenstände der Axiomatik sind, wie man sagt, durch die Axiome «implizit definiert». Die Frage nach der «Wahrheit» der Axiome hat in der modernen Axiomatik keinen Sinn. Es kann Gegenstände geben, für welche die Axiome zutreffen; dann treffen für ebendiese Gegenstände auch alle Folgerungen zu. Die Axiome sind keine echten Aussagen, deren Richtigkeit vom Autor behauptet wird, sondern das ganze Axiomsystem ist nur ein Teil einer Definition: Wenn diese Axiome erfüllt sind, so nennen wir die vorliegende Struktur eine Gruppe oder eine euklidische Geometrie, usw.

Das bisher Gesagte ist natürlich allgemein bekannt; es musste aber noch einmal gesagt werden, weil die meisten heutigen Mathematiker beim Wort «Axiomatik» nur an die moderne Axiomatik denken. Dass der klassische Standpunkt auch möglich ist und dass es unter Umständen didaktisch richtig sein könnte, sich in der Schule bewusst und ausdrücklich auf den klassischen Standpunkt zu stellen, daran denkt man nicht, und das führt zu den vorhin erwähnten Missverständnissen.

In einer klassischen Axiomatik braucht man nicht alles, was man als bekannt voraussetzt, ausdrücklich als Axiom zu formulieren. Man kann sehr vieles, was man für selbstverständlich oder bekannt hält, stillschweigend benutzen. EUKLEIDES und NEWTON haben das beide ausgiebig getan. Auch im Schulunterricht in Geometrie scheint es mir vernünftig, alles das, was anschaulich klar ist, ausdrücklich oder stillschweigend anzunehmen und nicht zu beweisen. Dass z.B. eine Seite AB eines Dreiecks kleiner ist als die Summe $AC+CB$, ist klar, denn von A über C nach B ist ein Umweg.

Welche Grundvoraussetzungen man ausdrücklich als Axiome formuliert und welche man stillschweigend annimmt, das ist in der klassischen Axiomatik eine rein didaktische Frage, über die man verschiedener Meinung sein kann. Auf ein Axiom mehr oder weniger kommt es nicht an.

Ganz anders in der modernen Axiomatik. Hier muss man alle Schlussfolgerungen rein logisch aus den Axiomen allein entwickeln. Nichts darf der Anschauung entnommen werden. Man darf in der Regel kein Axiom weglassen und keines hinzufügen.

Die Wasserscheide zwischen der klassischen und der modernen Axiomatik verläuft zwischen PASCH und HILBERT. PASCH hat ein Axiomsystem im klassischen Sinne aufgestellt. Seine Objekte waren Punkte, Geraden und Ebenen im Anschauungsraum, aber er hat alle Voraussetzungen, auf denen seine Geometrie beruhte, ausdrücklich formuliert und alle Beweise rein logisch geführt. Das hat es HILBERT ermöglicht, den Sinn der Axiome anders zu interpretieren. HILBERTS Punkte, Geraden und Ebenen sind irgend drei Klassen von Objekten, die die Axiome erfüllen.

Durch HILBERTS Geniestreich waren alle erkenntnistheoretischen Schwierigkeiten, die von jeher mit den geometrischen Grundbegriffen und Axiomen verbunden waren, mit einem Schlage aus der Welt geschafft. Allerdings nur aus der Welt des reinen Mathematikers, denn sobald man die Geometrie auf Planeten oder Maschinen anwendet, stellen sich die erkenntnistheoretischen Probleme von neuem.

Die klassische und die moderne Axiomatik verfolgen ganz verschiedene Ziele. Die klassische Axiomatik ist vor allem ein didaktisches Hilfsmittel. Ihr Ziel ist, eine Theorie so darzustellen, dass einige oder alle Grundvoraussetzungen klar herausgestellt werden und dass die Lehrsätze in überzeugender Weise aus diesen Grundvoraussetzungen hergeleitet werden. Besonders bei physikalischen Theorien hat diese Expositionsmethode grosse Vorteile, aber auch in der Geometrie hat sie sich gut bewährt. Mehr als zwei Jahrtausende lang hat die Menschheit aus den Elementen des EUKLEIDES Geometrie gelernt.

Die moderne Axiomatik hat ein ganz anderes Ziel. Sie wurde zunächst dazu geschaffen, Fragen wie die der Widerspruchslosigkeit und der Unabhängigkeit von Axiomen zu untersuchen. Ferner dient sie dazu, verschiedene mathematische Theorien einheitlich zusammenzufassen und zu verallgemeinern. Ein Satz, wie der von JORDAN-HÖLDER, der aus den Gruppenaxiomen allein hergeleitet wird, gilt für alle Gruppen und kann in den verschiedensten Gebieten angewandt werden.

Was folgt nun daraus für den Schulunterricht?

Zunächst müssen wir zwei Fragen vollständig voneinander trennen:

A. Soll man beim Elementarunterricht in der Geometrie die traditionelle Methode der klassischen Axiomatik beibehalten, modifizieren oder abschaffen?

B. Soll man ein Stück moderne Axiomatik, etwa der Gruppen, in der Schule behandeln?

Die zwei Fragen sind meines Erachtens völlig unabhängig. Man kann A bejahen oder verneinen, und unabhängig davon kann man B bejahen oder verneinen. Die klassische und die moderne Axiomatik verfolgen ja ganz verschiedene Ziele.

Die zwei Fragen werden manchmal miteinander vermischt. Wenn ich das Gespräch auf die Frage A bringe, die mir sehr am Herzen liegt, so erhalte ich häufig eine Antwort wie die folgende: «Die Axiomatik der Elementargeometrie ist so kompliziert, sie braucht so furchtbar viele Axiome. Könnte man nicht besser ein einfacheres Axiomsystem, etwa die Gruppenaxiome, in der Schule behandeln?»

Meine Antwort wird nach dem vorigen klar sein. Die Axiomatik der Elementargeometrie ist nur dann kompliziert, wenn man sich vornimmt, alle benutzten Voraussetzungen ausdrücklich als Axiome zu formulieren und alle Folgerungen rein logisch aus den Axiomen zu beweisen. Das aber wird kein vernünftiger Lehrer tun. Und zweitens: Die Frage, ob man ein einfaches modernes Axiomsystem in der Schule behandeln soll, hat mit der Frage des Geometrieunterrichts in den unteren Klassen überhaupt nichts zu tun.

Behandeln wir also beide Fragen getrennt.

A. Die axiomatische Methode (im klassischen Sinn, ohne vollständige Formulierung aller Grundannahmen und ohne vollständige Beweise) hat sich didaktisch seit Eukleides sehr gut bewährt. Warum sollte man sie verlassen? Wohl kann ich mir verschiedene Verbesserungen denken. Statt Beweise mit den Kongruenzsätzen zu führen, könnte man Verschiebungen, Drehungen und Spiegelungen verwenden. Beweise von anschaulich klaren Sätzen könnte man weglassen. In der Stereometrie, wo die Anschauung der Schüler und Schülerinnen manchmal versagt, könnte man mehr Axiome einführen und mehr logische Beweise erbringen.

Vielleicht ist es didaktisch richtig, mit Axiomen über die Addition von Vektoren anzufangen, wie Dieudonné und Papy es vorgeschlagen haben. Ich verfüge nicht über Erfahrungen mit dieser Methode und kann daher kein Urteil fällen.

Jedenfalls halte ich es für höchst wichtig, dass die Schüler wenigstens ein Beispiel eines Axiomsystems im klassischen Sinn in der Schule kennenlernen. Die Erkenntnis, dass exakte Wissenschaften wie die Geometrie und die Mechanik von gewissen Voraussetzungen ausgehen, die ihrerseits nicht bewiesen, sondern einfach angenommen werden, ist von grösster Wichtigkeit, nicht nur für diejenigen, die später Naturwissenschaftler oder Philosophen werden, sondern für alle gebildeten Menschen. Spinoza war von dieser Erkenntnis so beeindruckt, dass er seine Ethik «more geometrico» axiomatisch aufgebaut hat.

Die Bedeutung des Wortes «Axiom» sollte jeder gebildete Mensch kennen. Ich meine hier nicht die moderne, sondern die klassische Bedeutung. Die moderne Bedeutung ist nur für Mathematiker interessant und philosophisch ganz unerheblich, da ein Axiom ja nur ein Teil einer Definition ist; aber die klassische Bedeutung ist in den philosophischen Sprachgebrauch und in den des täglichen Lebens übergegangen. Wenn ein Politiker sagt: «Für mich ist es ein Axiom, dass...» oder wenn er sagt: «Mein Gegner geht offenbar von dem Axiom aus, dass...», so hat das Wort Axiom die klassische Bedeutung. Ein Axiom ist etwas, das man für wahr hält, aber nicht beweist.

Damit ist, wie mir scheint, das Beibehalten der klassisch-axiomatischen Methode in der Elementargeometrie genügend begründet.

Nun zur Frage B. Ich habe schon erwähnt, dass die moderne Axiomatik erkenntnistheoretisch uninteressant ist, da ein Axiomsystem im modernen Sinn einer Nominaldefinition gleichkommt. Ich sehe auch nicht ein, wieso eine axiomatische Behandlung eines Teiles des üblichen Schulstoffes zu einer Vereinheitlichung oder zu einem besseren Verständnis führen könnte. Wahrscheinlich ist es didaktisch möglich, die Aufstellung eines einfachen Axiomsystems den Schülern mundgerecht zu machen und sie zu veranlassen, einfache Folgerungen aus den Axiomen zu ziehen, aber wozu? Zu den Hauptzielen des Mathematikunterrichtes gehört wohl die Einführung in das exakt-wissenschaftliche Denken, aber nicht die Einführung in eine spezifisch-mathematische Denkweise, die den modernen Mathematikern eigentümlich ist.

B. L. van der Waerden, Zürich