Zur Induktion im Kontinuum

Autor(en): **Šalát, Tibor**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **22 (1967)**

Heft 3

PDF erstellt am: **30.06.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-25358

Nachdem die vorliegende Arbeit geschrieben war, teilte mir Herr Prof. F. KARTESZI mit, dass sein Assistent J. HORVATH die Gleichung (8) auf ähnlichem Wege entwickelt hat [3].

H. ZEITLER, Weiden/Deutschland

LITERATUR

[1] F. KARTESZI, *Eine Bemerkung über das Dreiecksnetz der hyperbolischen Ebene*, Publ. Math. Debrecen *5*, 142–146 (1957).
[2] H. MESCHKOWSKI, *Differenzengleichungen*, Göttingen (1959), 94–98.
[3] J. HORVATH, *Über die regulären Mosaiken der hyperbolischen Ebene*, Ann. Sect. Math. Budapest *7*, 49–53 (1964).

Zur Induktion im Kontinuum

Unter Kontinuum verstehen wir eine dicht geordnete Menge A ohne erstes und letztes Glied. Das Prinzip der Induktion im Kontinuum kann man so formulieren (siehe [2]):

Es sei S eine Eigenschaft. Folgende Voraussetzungen seien erfüllt:

(i) Es existiert ein solches $\alpha \in A$, dass jedes $\lambda \in A$, $\lambda < \alpha$ die Eigenschaft S hat.

(ii) Wenn alle $\lambda \in A$, $\lambda < \beta$ $(\beta \in A)$ die Eigenschaft S haben, dann existiert ein solches $\gamma \in A$, $\beta < \gamma$, dass jedes $\lambda \in A$, $\lambda < \gamma$ die Eigenschaft S hat.

Behauptung: Alle Elemente des Kontinuums A haben die Eigenschaft S.

In der Arbeit [2] ist bewiesen, dass das Prinzip der Induktion im Kontinuum dasselbe bedeutet wie das Dedekindsche Axiom über die Nichtexistenz von Lücken im Kontinuum. In den Arbeiten [1] und [2] gebraucht man das Prinzip der Induktion im Kontinuum zum Beweis einiger grundlegender Sätze der Analysis. In diesem Artikel geben wir mit Hilfe des Prinzips der Induktion in $(-\infty, +\infty)$ einen neuen Beweis des folgenden grundlegenden Satzes der Analysis, der von E. HEINE stammt.

Satz. Es sei f eine auf dem endlichen, abgeschlossenen Intervall $\langle a, b\rangle$ stetige reelle Funktion. Dann ist f gleichmässig stetig auf $\langle a, b\rangle$.

Beweis. f erfülle die Voraussetzungen des Satzes. Wir setzen noch $f(x) = f(a)$ für $x < a$ und $f(x) = f(b)$ für $x > b$. Dann ist f für alle $x \in (-\infty, +\infty)$ definiert und stetig im ganzen Intervall $(-\infty, +\infty)$.

Es sei $\varepsilon > 0$. Wir sagen, dass die Zahl $\lambda \in (-\infty, +\infty)$ die Eigenschaft $S(\varepsilon)$ hat, wenn zwei reelle Zahlen $\delta = \delta(\varepsilon, \lambda) > 0$, $\eta = \eta(\varepsilon, \lambda) > 0$ existieren, so dass für jedes Zahlenpaar $x', x'' \in (-\infty, \lambda + \eta)$, für das $|x' - x''| < \delta$ gilt, $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ ist. Wir zeigen dann mit Hilfe des Prinzips der Induktion in $(-\infty, +\infty)$, dass alle reellen Zahlen die Eigenschaft $S(\varepsilon)$ haben.

Es sei also ε eine beliebige positive reelle Zahl und $S(\varepsilon)$ habe die obige Bedeutung. Wenn $\alpha < a$ ist, dann hat offenbar jede Zahl $\lambda < \alpha$ die Eigenschaft $S(\varepsilon)$, also ist für $S = S(\varepsilon)$ die Voraussetzung (i) des Prinzips der Induktion erfüllt.

Wir zeigen jetzt, dass auch die Voraussetzung (ii) für $S = S(\varepsilon)$ erfüllt ist. Es sei $\beta \in (-\infty, +\infty)$, und es habe jedes $\lambda < \beta$ die Eigenschaft $S(\varepsilon)$. Wenn $\beta < a$ ist, setzen wir $\gamma = a$, für $\beta > b$ setzen wir $\gamma = \beta + 1$, dann ist die Voraussetzung (ii) sichtlich erfüllt. Es sei endlich $a \leqq \beta \leqq b$. Wir beschränken uns auf den Fall

$a < \beta < b$ (wenn $\beta = a$ oder $\beta = b$ ist, kann man den Beweis ähnlich führen). Aus der Stetigkeit von f in β folgt die Existenz einer Zahl $\tau > 0$, so dass

$$0 < \tau < \min(\beta - a, b - \beta) \text{ und } |f(x') - f(x'')| < \varepsilon \text{ für } x', x'' \in (\beta - \tau, \beta + \tau).$$

Wählen wir λ_0 so, dass $\beta - \tau < \lambda_0 < \beta$. Nach Voraussetzung hat die Zahl λ_0 die Eigenschaft $S(\varepsilon)$, also existieren positive Zahlen $\delta = \delta(\varepsilon, \lambda_0)$, $\eta = \eta(\varepsilon, \lambda_0)$, so dass $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ ist für $x', x'' \in (-\infty, \lambda_0 + \eta)$ und $|x' - x''| < \delta$. Setzen wir $\delta_1 = \min(\lambda_0 - (\beta - \tau), \delta, \tau) > 0$. Es sei $x', x'' \in (-\infty, \beta + \delta_1)$, $|x' - x''| < \delta_1$. Dann ist mit Rücksicht auf die Wahl der Zahl δ_1 entweder $x', x'' \in (-\infty, \lambda_0\rangle$ oder $x', x'' \in (\beta - \tau, \beta + \tau)$ und in beiden Fällen ist nach dem Vorhergehenden $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$. Setzen wir $\gamma = \beta + \delta_1 > \beta$. Aus dem Vorigen folgt, dass jedes $\lambda < \gamma$ die Eigenschaft $S(\varepsilon)$ hat (für ein λ mit $\beta < \lambda < \beta + \delta_1$ genügt es, $\delta(\varepsilon, \lambda) = \delta_1$, $\eta(\varepsilon, \lambda) = \beta + \delta_1 - \lambda$ zu setzen).

Nach dem Prinzip der Induktion hat jede reelle Zahl die Eigenschaft $S(\varepsilon)$. Speziell also hat die Zahl b die Eigenschaft $S(\varepsilon)$ (für jedes $\varepsilon > 0$), und daraus folgt schon unmittelbar die gleichmässige Stetigkeit von f.

TIBOR ŠALÁT, Bratislava

LITERATUR

[1] O. PERRON, *Die vollständige Induktion im Kontinuum*, Jhb. Deutsch. Math.-Verein. *35*, 194–203 (1926).

[2] A. CHINČIN, *Das einfachste lineare Kontinuum* (russisch), Uspechi matem. nauk *4*, 180–197 (1949).

Kleine Mitteilungen

Zur Hyperbel des Menaichmos

Dem MENAICHMOS (ca. 350 v. Chr.) werden bekanntlich zwei Lösungen des «Delischen Problems» der Würfelverdoppelung zugeschrieben. Bei der einen soll er neben einer Parabel eine gleichseitige Hyperbel als geometrischen Ort verwendet haben auf Grund ihrer Asymptoteneigenschaft

$$xy = ab\,. \tag{1}$$

Seine Lösung, die allerdings nur in einer späten Fassung von EUTOKIOS (5./6. Jh. n. Chr.) überliefert ist, wird in deutscher Übersetzung mitgeteilt bei E. HOPPE [4] und im Originaltext des EUTOKIOS mit etwas havarierter Übersetzung bei C. A. BRETSCHNEIDER [1]. MENAICHMOS soll auch gezeigt haben, dass die von ihm benützten Kurven als ebene Schnitte an Rotationskegeln auftreten, was allerdings von J. TROPFKE [5] ziemlich kategorisch bezweifelt wird. Für die Parabel wäre ein solcher Identitätsnachweis zwar sehr einfach, für die gleichseitige Hyperbel nur dann, wenn der Schnitt parallel zur Achse eines rechtwinkligen Kegels geführt wird (siehe K. FLADT [2]). Nach der (nicht unangefochtenen) Überlieferung hätten aber die Mathematiker vor ARCHIMEDES die Schnitte am Drehkegel stets senkrecht zu einer Mantellinie angenommen und deshalb für die Hyperbel einen stumpfwinkligen Kegel gebraucht (siehe BRETSCHNEIDER [1], S. 156). ZEUTHEN [7] berücksichtigt diesen Umstand für seine Rekonstruktion eines für MENAICHMOS möglichen Beweises in seinem klassischen Buch.