Kleine Mitteilungen

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **22 (1967)**

Heft 3

PDF erstellt am: **10.08.2024**

$a < \beta < b$ (wenn $\beta = a$ oder $\beta = b$ ist, kann man den Beweis ähnlich führen). Aus der Stetigkeit von f in β folgt die Existenz einer Zahl $\tau > 0$, so dass

$$0 < \tau < \min(\beta - a, b - \beta) \text{ und } |f(x') - f(x'')| < \varepsilon \text{ für } x', x'' \in (\beta - \tau, \beta + \tau) .$$

Wählen wir λ_0 so, dass $\beta - \tau < \lambda_0 < \beta$. Nach Voraussetzung hat die Zahl λ_0 die Eigenschaft $S(\varepsilon)$, also existieren positive Zahlen $\delta = \delta(\varepsilon, \lambda_0)$, $\eta = \eta(\varepsilon, \lambda_0)$, so dass $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$ ist für $x', x'' \in (-\infty, \lambda_0 + \eta)$ und $|x' - x''| < \delta$. Setzen wir $\delta_1 = \min(\lambda_0 - (\beta - \tau), \delta, \tau) > 0$. Es sei $x', x'' \in (-\infty, \beta + \delta_1)$, $|x' - x''| < \delta_1$. Dann ist mit Rücksicht auf die Wahl der Zahl δ_1 entweder $x', x'' \in (-\infty, \lambda_0\rangle$ oder $x', x'' \in (\beta - \tau, \beta + \tau)$ und in beiden Fällen ist nach dem Vorhergehenden $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$. Setzen wir $\gamma = \beta + \delta_1 > \beta$. Aus dem Vorigen folgt, dass jedes $\lambda < \gamma$ die Eigenschaft $S(\varepsilon)$ hat (für ein λ mit $\beta < \lambda < \beta + \delta_1$ genügt es, $\delta(\varepsilon, \lambda) = \delta_1$, $\eta(\varepsilon, \lambda) = \beta + \delta_1 - \lambda$ zu setzen).

Nach dem Prinzip der Induktion hat jede reelle Zahl die Eigenschaft $S(\varepsilon)$. Speziell also hat die Zahl b die Eigenschaft $S(\varepsilon)$ (für jedes $\varepsilon > 0$), und daraus folgt schon unmittelbar die gleichmässige Stetigkeit von f.

TIBOR ŠALÁT, Bratislava

LITERATUR

[1] O. PERRON, *Die vollständige Induktion im Kontinuum*, Jhb. Deutsch. Math.-Verein. *35*, 194–203 (1926).

[2] A. CHINČIN, *Das einfachste lineare Kontinuum* (russisch), Uspechi matem. nauk *4*, 180–197 (1949).

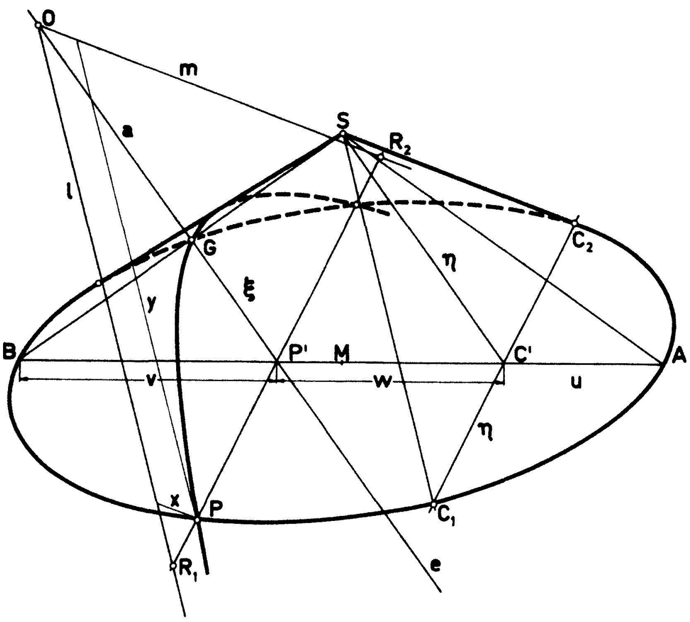
Kleine Mitteilungen

Zur Hyperbel des Menaichmos

Dem MENAICHMOS (ca. 350 v.Chr.) werden bekanntlich zwei Lösungen des «Delischen Problems» der Würfelverdoppelung zugeschrieben. Bei der einen soll er neben einer Parabel eine gleichseitige Hyperbel als geometrischen Ort verwendet haben auf Grund ihrer Asymptoteneigenschaft

$$xy = ab \,. \tag{1}$$

Seine Lösung, die allerdings nur in einer späten Fassung von EUTOKIOS (5./6. Jh. n.Chr.) überliefert ist, wird in deutscher Übersetzung mitgeteilt bei E. HOPPE [4] und im Originaltext des EUTOKIOS mit etwas havarierter Übersetzung bei C. A. BRETSCHNEIDER [1]. MENAICHMOS soll auch gezeigt haben, dass die von ihm benützten Kurven als ebene Schnitte an Rotationskegeln auftreten, was allerdings von J. TROPFKE [5] ziemlich kategorisch bezweifelt wird. Für die Parabel wäre ein solcher Identitätsnachweis zwar sehr einfach, für die gleichseitige Hyperbel nur dann, wenn der Schnitt parallel zur Achse eines rechtwinkligen Kegels geführt wird (siehe K. FLADT [2]). Nach der (nicht unangefochtenen) Überlieferung hätten aber die Mathematiker vor ARCHIMEDES die Schnitte am Drehkegel stets senkrecht zu einer Mantellinie angenommen und deshalb für die Hyperbel einen stumpfwinkligen Kegel gebraucht (siehe BRETSCHNEIDER [1], S. 156). ZEUTHEN [7] berücksichtigt diesen Umstand für seine Rekonstruktion eines für MENAICHMOS möglichen Beweises in seinem klassischen Buch.



Figur 1

Der nachfolgende Versuch zeigt eine andere Möglichkeit, die Gleichung (1) für die gleichseitige Hyperbel an einem geeigneten stumpfwinkligen Kegel unter den gleichen Annahmen abzuleiten, wobei der zweite Scheitel der Kurve (von der ursprünglich doch wohl nur der eine Ast in Betracht gezogen wurde) im Gegensatz zu ZEUTHEN nicht benützt wird. Es werden nur elementarste Mittel verwendet, deren Kenntnis für die Zeit des MENAICHMOS vorausgesetzt werden dürfen (Winkel im Halbkreis, Höhen- und Kathetensatz im rechtwinkligen Dreieck, ein Strahlensatz), da sie schon bei der bekannten stereometrischen Lösung des Würfelverdoppelungsproblems durch ARCHYTAS benützt sind (siehe z.B. HEATH [3] oder VAN DER WAERDEN [6]). Die Darstellung verwendet die algebraische Schreibweise (wie übrigens auch die von ZEUTHEN). In der geometrischen Sprache der Antike wäre allerdings der letzte Teil nicht gerade einfach darzustellen.

Es ist zunächst ein Rotationskegel zu bestimmen, für welchen der ebene Schnitt normal zu einer Mantellinie zwei zueinander senkrechte Asymptoten besitzt. Es sei ASB ein Achsenschnitt eines solchen Kegels. Die Ebene E sei normal zu SB; ihre Schnittlinie e mit der Ebene ASB ist Symmetrieachse der Schnittkurve. Für MENAICHMOS kommt nur der eine Ast der Kurve in Betracht. Wohl aber wird er erkannt oder einmal angenommen haben, dass die Richtungen der nachzuweisenden Asymptoten durch die zu E parallelen Mantellinien SC_1, SC_2 gegeben sind. Deren Ebene schneide AB in C'. Dann ist einerseits

$$\overline{CC'}^2 = \overline{AC'}\,\overline{C'B} \quad \text{(Thaleskreis und Höhensatz)}\,, \tag{2}$$

anderseits

$$\overline{SC'}^2 = \overline{C'M}\,\overline{C'B} \quad \text{(Kathetensatz)}\,, \tag{3}$$

mit M als Mittelpunkt des Grundkreises ACB. Sollen die beiden Mantellinien zueinander normal sein, so muss $\overline{SC'} = \overline{CC'} = \eta$, also nach (2) und (3) $\overline{AC'} = \overline{C'M}$, d.h. $\overline{AC'} = u$ gleich dem halben Grundkreisradius sein, und es wird

$$\eta^2 = \overline{AC'}\,\overline{C'B} = 3\,u^2\,. \tag{4}$$

Wir setzen nun voraus, dass der zugrunde gelegte Kegel dieser Forderung gemäss konstruiert sei (also $\overline{SM}^2 = 2u^2 = 0{,}5\,\overline{MA}^2$).

Die (vermuteten) rechtwinkligen Asymptoten l, m mögen sich im Punkte O von e im Abstand a vom Scheitel G der Schnittkurve schneiden. Es sei P ein beliebiger Punkt dieser Kurve, P' seine Projektion auf e und $\overline{P'G} = \xi$. Der bisher als «Grundkreis» bezeichnete Kreis sei gerade der durch P gelegte. Die Sekante PP' treffe die Geraden l, m in R_1, R_2.

Die Strecken $\overline{PR_1}$ und $\overline{PR_2}$ sind $\sqrt{2}$-mal länger als die Abstände x, y des Punktes P von l und m. Es ist zu zeigen, dass das Produkt $p = \overline{PR_1}\,\overline{PR_2} = 2\,x\,y$ konstant, d.h. unabhängig von ξ ist, wenn a passend gewählt wird. Wir setzen noch $\overline{C'P'} = w$, $\overline{P'B} = v$, also $v + w = 3\,u$.

Nun ist $p = \overline{R_1P'}^2 - \overline{PP'}^2$ und $\overline{R_1P'} = a + \xi$, $\overline{PP'}^2 = \overline{AP'}\,\overline{P'B} = (u + w)\,v$. Da $\xi/\eta = v/3\,u$ und nach (4) $\eta = u\sqrt{3}$, so ist $\xi = v/\sqrt{3}$, und es wird

$$p = \left(a + \frac{v}{\sqrt{3}}\right)^2 - \left(\frac{v + w}{3} + w\right) v = a^2 + \left(\frac{2\,a}{\sqrt{3}} - \frac{4\,w}{3}\right) v\,.$$

Lässt man nun den Punkt P auf der Schnittkurve und damit den «Grundkreis» auf der Kegelfläche variieren, so bleiben a und w konstant; der Koeffizient von v kann durch die Wahl von $a = 2\,w/\sqrt{3}$ zum Verschwinden gebracht werden. Damit ist die Konstanz von $p = 2\,x\,y = a^2$ erreicht. C. Bindschedler, Küsnacht

LITERATURVERZEICHNIS

[1] C. A. Bretschneider, *Die Geometrie und die Geometer vor* Euklides, 1870, S. 159.
[2] K. Fladt, *Geschichte und Theorie der Kegelschnitte*, 1965, S. 6–7.
[3] Th. Heath, *A Manual of Greek Mathematics*, Oxford 1931, S. 155–157.
[4] Edm. Hoppe, *Mathematik und Astronomie im klassischen Altertum*, Heidelberg 1911, S. 188–189.
[5] Joh. Tropfke, *Geschichte der Elementarmathematik*, 2. A., Band VI, S. 131.
[6] B. L. van der Waerden, *Erwachende Wissenschaft*, Basel 1956, S. 249–250.
[7] H. G. Zeuthen, *Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum*, S. 462–465.

Aufgaben

Aufgabe 525. Die Ecken eines gleichseitigen Dreiecks sind Zentren von drei gleichen Kreisen K_1, K_2, K_3 vom Radius r. Ein beliebiger Punkt P der Ebene des Dreiecks werde an K_1 nach P_1 gespiegelt, ebenso P_1 an K_2 nach P_2 und P_2 an K_3 nach P_3. Welches ist der geometrische Ort der Fixpunkte der Abbildung $P \to P_3$, wenn r variiert?

C. Bindschedler, Küsnacht

1. Lösung. Zunächst zwei Vorbetrachtungen. a) Bezeichnet s_i die Spiegelung am Kreis K_i ($i = 1, 2, 3$), dann gilt $s_1^2 = s_2^2 = s_3^2 = e$ (= identische Abbildung). Aus der Frage nach den Punkten P mit $s_3\,s_2\,s_1(P) = P$ ergibt sich daher wegen der Umkehrbarkeit der Abbildungen s_i als gleichwertig $s_2\,s_1(P) = s_3(P)$ mit $s_2\,s_1(P) = s_2(P_1) = P_2$. – b) Wird die Ebene als komplexe Zahlenebene aufgefasst, dann stellt sich die Spiegelung s_i an dem Kreis $K_i(M_i; r)$ dar in der Form

$$s_i(P) = M_i + \frac{r^2}{\overline{P} - \overline{M}_i} = \frac{r^2 - M_i\,\overline{M}_i + M_i\,\overline{P}}{\overline{P} - \overline{M}_i} \quad (i = 1, 2, 3)\,.$$

Es kann ohne Einschränkung $M_1 = O$, $M_2 = \sqrt{3} + i =: M$, $M_3 = \sqrt{3} - i = \overline{M}$ angenommen werden; die Seitenlänge des Dreiecks ist dann gleich 2 und $I = 2/\sqrt{3}$ der Mittelpunkt. Dann ist

$$s_1(P) = P_1 = \frac{r^2}{\overline{P}}\,, \quad s_2(P_1) = s_2\,s_1(P) = \frac{(r^2 - 4)\,P + M\,r^2}{r^2 - \overline{M}\,P}\,,$$

$$s_3(P) = \frac{r^2 - 4 + \overline{M}\,\overline{P}}{\overline{P} - M}\,.$$