Zeitschrift: Elemente der Mathematik

Band: 22 (1967)

Heft: 4

Rubrik: Aufgaben

form with high density of primes with smallest $p = 5$. Of course, all further smallest p of this form, or better: contained in this form, belong to $x^2 + x + 41$. It can be easily derived from Lehmer's sixth $A = 12899891 = 1663 \cdot 7757 = x^2 + x + 1019$ for $x = 3591$. The evaluation of the first 160 values of $f(x) = x^2 + x + 1019$ yields 96 primes, which is exactly 60%.

EDGAR KARST, University of Arizona, Tucson, Arizona

REFERENCES

[1] N. G. W. H. BEEGER, *On a New Case of the Congruence* $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2}$, Messenger Math. *51*, 149–150 (1922).
[2] N. G. W. H. BEEGER, *Liste des nombres premiers du onzième million (plus précisément de 10006741 a 10999997) d'après les tables manuscrites de J. Ph. Kulik, L. Poletti et R. J. Porter*, Amsterdam 1951.
[3] HARVEY COHN, *A Second Course in Number Theory*, New York 1962.
[4] HOWARD EVES, *An Introduction to the History of Mathematics*, New York 1953.
[5] A. FERRIER, *Les Nombres Premiers, principaux résultats obtenus depuis Euclide*, Paris 1947.
[6] CARL-ERIK FRÖBERG, *Some Computations of Wilson and Fermat Remainders*, Math. Tables and other Aids to Comp. *12*, 281 (1958).
[7] MELVIN HAUSNER and DAVID SACHS, *On the Congruence* $2^p \equiv 2(p^2)$, Amer. Math. Monthly *70*, 996 (1963).
[8] SIDNEY KRAVITZ, *The Congruence* $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2}$ *for* $p < 100000$, Math. Comp. *14*, 378 (1960).
[9] SIDNEY KRAVITZ, *Elementary Observations Concerning Euler's Prime Generating Polynomial* $f(n) = n^2 - n + 41$, Math. Mag. *35*, 152 (1962).
[10] W. MEISSNER, *Über die Teilbarkeit von* $2^p - 2$ *durch das Quadrat der Primzahl* $p = 1093$, Akad. der Wiss., Berlin, Sitzber. 1913, p. 663.
[11] D. H. LEHMER, *On the Function* $X^2 + X + A$, Sphinx *6*, 212–214 (1936); *7*, 40 (1937); *9*, 83–85 (1939).
[12] N. R. PEKELHARING, *The Number 41*, Simon Stevin *27*, 93–98 (1950).
[13] LUIGI POLETTI, *Il contributo italiano alla tavola dei numeri primi*, Rivista di Matematica della Università di Parma *2*, 417–434 (1951).
[14] HANS RIESEL, *Note on the Congruence* $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p^2}$, Math. Comp. *18*, 149–150 (1964).
[15] DAVID SACHS, *A Note on* $n^p \equiv n$ Mod (p^2), communicated to the author by MELVIN HAUSNER in a letter of March 10, 1965.

Aufgaben

Aufgabe 529. Um je zwei zueinander orthogonale Kreise eines elliptischen Kreisbüschels werden die gemeinsamen Tangenten gelegt. Welches ist die Enveloppe dieser Tangentenpaare? C. BINDSCHEDLER, Küsnacht

Lösung. Für einen Kreis k des elliptischen Kreisbüschels durch die Punkte $F_1(1, 0)$ und $F_2(-1, 0)$ kann Mittelpunkt M und Radius r durch $M(0, m)$ und $r = \sqrt{1 + m^2}$ angegeben werden, so dass für den zu k orthogonalen Kreis k' gilt: $M'(0, -1/m)$, $r' = \sqrt{1 + (-1/m)^2}$. Verwendung der HESSEschen Normalform liefert aus

$$\left| \left. \frac{u\,x + v\,y + w}{\sqrt{u^2 + v^2}} \right|_{(x,y) = (0,m)} \right| = \sqrt{1 + m^2}$$

für den Kreis k die Gleichung

$$k \ldots 0 = (1 + m^2)\, u^2 + v^2 - w^2 - 2\, m\, v\, w \quad (-\infty < m < \infty) \tag{1}$$

in Geradenkoordinaten (u, v, w). Die Gleichung des zu k orthogonalen Kreises k' ist durch Ersetzen von m durch $-1/m$ aus (1) zu erhalten:

$$k' \ldots 0 = (1 + m^2)\, u^2 + m^2\, v^2 - m^2\, w^2 + 2\, m\, v\, w\,. \tag{2}$$

Die gemeinsamen Lösungen (u, v, w) von (1) und (2) sind die Linienkoordinaten der gemeinsamen Tangenten von k und k'. Diese Koordinaten genügen auch der durch Addition aus (1) und (2) hervorgehenden Gleichung, die wegen $1 + m^2 \neq 0$ mit

$$0 = 2\, u^2 + v^2 - w^2$$

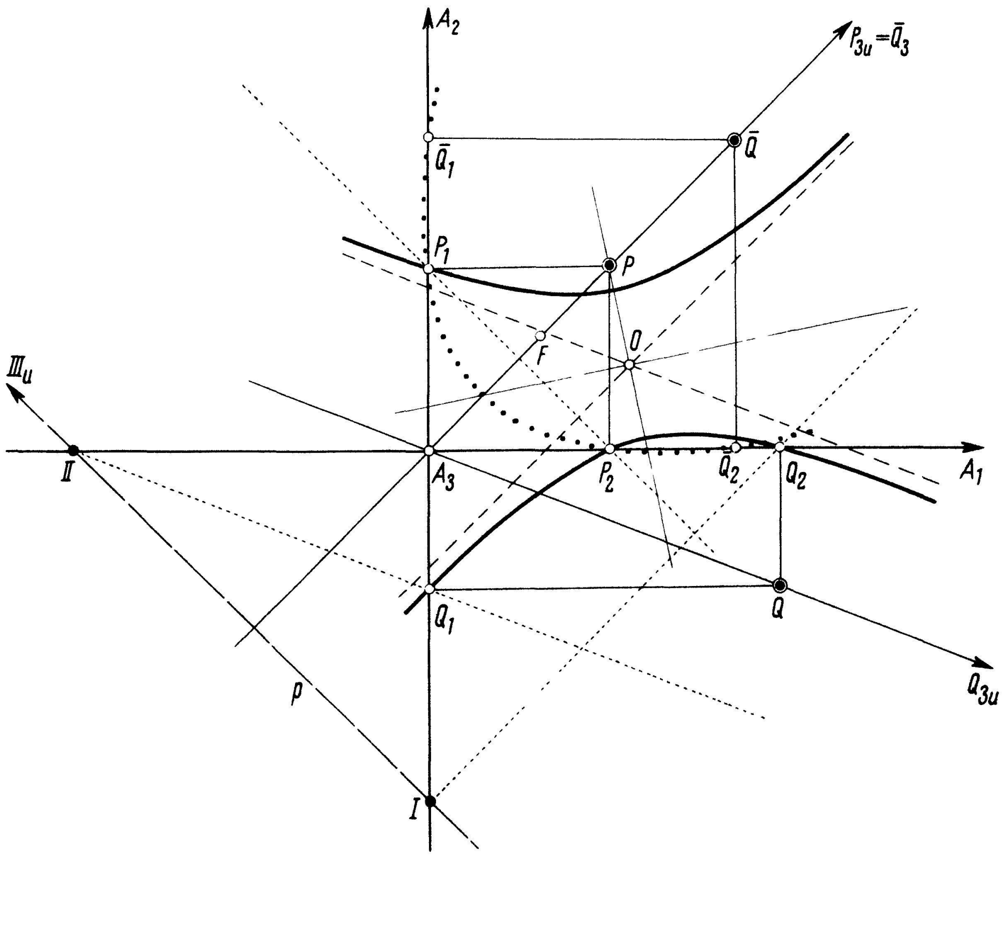
gleichwertig ist. Sie gibt die gesuchte Enveloppe an und ist nichts anderes als die Gleichung der Ellipse $0{,}5\, x^2 + y^2 = 1$, die die Grundpunkte F_1 und F_2 des Kreisbüschels als Brennpunkte besitzt, in Linienkoordinaten. G. GEISE, Dresden

Weitere Lösungen sandten W. JÄNICHEN (Berlin-Zehlendorf), L. KIEFFER (Luxemburg), H. MEILI (Winterthur).

Aufgabe 530. In der Ebene eines Dreiecks werden zwei Punkte beliebig so gewählt, dass keiner von ihnen auf einer Dreiecksseite liegt. Man zeige, dass die sechs Fusspunkte der Ecktransversalen durch die beiden Punkte auf einem Kegelschnitt liegen.

J. SCHOPP, Budapest

Lösung. Wir bezeichnen die Eckpunkte des Dreiecks mit A_i $(i = 1, 2, 3)$, die beliebig gewählten Punkte mit P und Q und die Fusspunkte der Eckentransversalen $[A_i\, P]$ bzw. $[A_i\, Q]$ mit P_i bzw. Q_i. Da die Punkte P und Q verschieden sind, kann höchstens für einen Wert von i $P_i = Q_i$ gelten.



Wegen des projektiven Charakters der Aufgabe können wir die Eckpunkte A_1 und A_2 als Fernpunkte zueinander orthogonaler Richtungen und den Punkt P als einen Punkt auf der Winkelsymmetralen des Winkels $\sphericalangle A_3 A_1 A_2$ annehmen. Die Punkte P_3 und Q_3 sind dann gleichfalls Fernpunkte. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir weiters die Punkte P_1, P_2, Q_1 und Q_2 als voneinander verschieden voraussetzen. Wir betrachten nun das Sechseck $Q_1 P_1 P_2 Q_2 P_3 Q_3$. Die Gegenseiten dieses Sechseckes besitzen Schnittpunkte

$$\mathrm{I} = [P_1 Q_1 \cdot Q_2 P_3]$$

$$\mathrm{II} = [P_2 Q_2 \cdot Q_3 Q_1]$$

$$\mathrm{III} = [P_1 P_2 \cdot P_3 Q_3]\,,$$

welche auf einer Geraden liegen, denn es gilt $\overline{A_3 Q_2} = \overline{A_3 \mathrm{I}} = \overline{A_3 \mathrm{II}}$ und weiters $\overline{\mathrm{I}\,\mathrm{II}} \parallel \overline{P_1 P_2}$. Auf Grund des Satzes von PASCAL liegen nun die sechs Punkte P_i und Q_i auf einem Kegelschnitt.

Gilt $P_3 = Q_3$, so ist die zunächst unbestimmte Verbindungsgerade $[P_3 Q_3]$ durch $[A_1 A_2]$ zu ersetzen. Wie vorhin folgt dann, dass die Punkte P_i und Q_i auf einer Parabel liegen, die $[A_1 A_2]$ in $P_3 = Q_3$ berührt. H. VOGLER, Wien

W. JÄNICHEN (Berlin-Zehlendorf) weist darauf hin, dass der Satz der Aufgabe in E. JAHNKE, *Vorlesungen über die Vektorenrechnung*, Leipzig 1905, S. 76–78 als Übungsaufgabe (mit Lösung) vorkommt. Eine Verallgemeinerung des Satzes auf den n-dimensionalen Raum gibt die Aufgabe 552 (El. Math. *22*, 69 (1967) von J. SCHOPP.

Weitere Lösungen sandten C. BINDSCHEDLER (Küsnacht), G. GEISE (Dresden), H. MEILI (Winterthur), K. SCHULER (Rottweil).

Aufgabe 531. Démontrer que, pour n naturel, la condition que le nombre $2^n + 1$ soit premier n'est pas ni nécessaire ni suffisante pour que le nombre $2^{2^n} + 1$ soit premier (contrairement à ce qu'écrit M. H. VARCOLLIER à la page 15 de son livre *Nombres premiers, nombres avant-premiers*, Presses Universitaires de France, 1965).

W. SIERPIŃSKI, Varsovie

Lösung. Von den drei Zahlen

$$2^3 + 1, \quad 2^{2^3} + 1 = 2^8 + 1, \quad 2^{2^8} + 1$$

ist nur die zweite Primzahl. Dass die dritte Zahl zusammengesetzt ist, wurde schon 1909 von J. C. MOREHEAD und A. E. WESTERN bewiesen.

Diese Lösung sandten P. BUNDSCHUH (Freiburg/Br.), H. HARBORTH (Braunschweig), P. HOHLER (Olten), E. WIDMER (Biel).

Aufgabe 532. Die multiplikative Gruppe der zweireihigen quadratischen Matrizen mit *komplexen* Elementen und nichtverschwindender Determinante ist bekanntlich isomorph zu einer Untergruppe der Gruppe der vierreihigen quadratischen Matrizen mit *reellen* Elementen und nichtverschwindender Determinante. Man zeige, dass dasselbe gilt, wenn man die komplexen Zahlen durch Dualzahlen $a + b\,\varepsilon$ ($\varepsilon^2 = 0$) ersetzt.

G. KIRSCHMER, München

Lösung. Für eine zweireihige quadratische duale Matrix

$$M := \begin{pmatrix} a_0 + \varepsilon b_0 & a_1 + \varepsilon b_1 \\ a_2 + \varepsilon b_2 & a_3 + \varepsilon b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ a_2 & a_3 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} b_0 & b_1 \\ b_2 & b_3 \end{pmatrix} =: A + \varepsilon B$$

ist der Passus «mit nicht verschwindender Determinante» zu ersetzen durch «mit Determinante, die nicht Nullteiler ist», welcher Fall genau für $a_0 a_3 - a_1 a_2 = |A| \neq 0$ vorliegt (genau dann besitzt M in $M^{-1} := A^{-1} - \varepsilon A^{-1} B A^{-1}$ eine eindeutig bestimmte Rechts- und Links-Inverse). – Schreibt man das Produkt $M N$ zweier dualer Matrizen $M = A + \varepsilon B$ und $N = C + \varepsilon D$ einmal aus, dann erkennt man nach der «Methode des scharfen Hinguckens», dass die Zuordnung

$$\begin{pmatrix} a_0 + \varepsilon b_0 & a_1 + \varepsilon b_1 \\ a_2 + \varepsilon b_2 & a_3 + \varepsilon b_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & b_0 & b_1 \\ a_2 & a_3 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 \\ 0 & 0 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}$$

wegen $|A| \neq 0$ die gewünschte isomorphe Abbildung angibt. G. GEISE, Dresden

Neue Aufgaben

Aufgabe 553. k étant un nombre naturel donné, appelons P_k le problème suivant: Existe-t-il des nombres triangulaires > 0 qui sont sommes de k nombres triangulaires consécutifs > 0?

Examiner pour quels entiers k, tels que $2 \leqq k \leqq 10$, le problème P_k n'a pas de solutions, pour quels k il admet un nombre fini > 0 de solutions, et pour quels k il a une infinité de solutions. W. SIERPIŃSKI, Varsovie

Aufgabe 554. Démontrer qu'il existe une infinité de nombres naturels k pour lesquels le problème P_k (voir n° 553) n'a pas de solutions, et une infinité de nombres k pour lesquels P_k a une infinité de solutions. W. SIERPIŃSKI, Varsovie

Aufgabe 555. Aus neun Punkten $A, B, C, A_1, B_1, C_1, A_2, B_2, C_2$ eines Kegelschnitts werden die Dreiecke ABC, $A_1B_1C_1$, $A_2B_2C_2$ und das Dreieck gebildet, das aus den Geraden A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 als Seiten besteht. Ist Dreieck ABC zu zweien der anderen Dreiecke perspektiv, so auch zu dem dritten. W. SCHÖBE, München

Aufgabe 556. Es sei $\sum_{i=1}^{n} a_i = 0$, a_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ eine komplexe p-te Einheitswurzel und p eine Primzahl. Man zeige, dass jede p-te Einheitswurzel gleich oft als Summand in der obigen Summe vorkommt. H. LÜNEBURG, Mainz

Aufgaben für die Schule

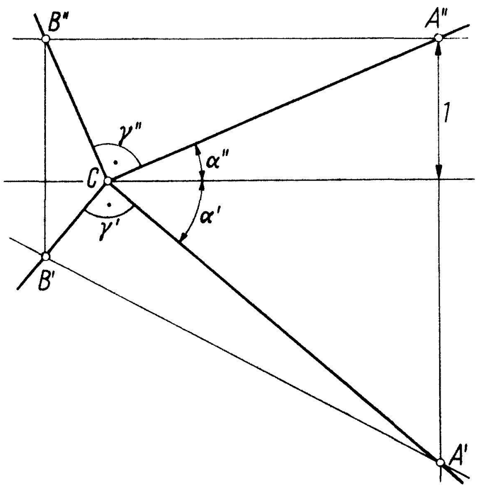
Es wird kein Anspruch auf Originalität der Aufgaben erhoben; Autoren und Quellen werden im allgemeinen nicht genannt. Die Daten für Aufgaben aus der Darstellenden Geometrie sind durchwegs so festgelegt, dass der Ursprung des Koordinatensystems in der Mitte des linken Randes eines Blattes von Format A4 gewählt werden soll, x-Achse nach rechts, y-Achse nach vorn, z-Achse nach oben, Einheit 1 cm. Anregungen und Beiträge sind zu senden an Prof Dr. WILLI LÜSSY, Büelrainstrasse 51, Winterthur

1. Ein reguläres Dreieck ABC mit der Seite s liegt in der Projektionsebene und ist Grundfläche einer Pyramide mit der Spitze D. Für die Neigungswinkel der Seitenflächen gilt:
$$\operatorname{tg} \varphi_a = \operatorname{tg} \varphi_b = 2, \quad \operatorname{tg} \varphi_c = 1 .$$
Konstruiere den Riss des Tetraeders und zeige: D' halbiert die Dreieckshöhe h; D hat die Kote $s\sqrt{3}/4$.

2. Eine Ebene E ist durch die Punkte $A(5; 6; 1)$, $B(10; 5; 8)$ und $C(13; -3; 5)$ bestimmt. Lege durch B die Gerade g in E, deren beide Risse senkrecht aufeinanderstehen.
▶ Der Schnittpunkt von g' und g'' liegt auf der Schnittgerade von E mit der Koinzidenzebene. Bei der angegebenen Disposition hat die Aufgabe zwei Lösungen.

3. Ein schwerer Stab AB der Länge a is folgendermassen aufgehängt: A gleitet ohne Reibung an einer Gerade g, die gegenüber der Waagrechten um den Winkel α nach unten geneigt ist; B ist durch einen masselosen Faden der Länge a mit einem festen Punkt G von g verbunden. Für welchen Winkel $x = \sphericalangle AGB$ herrscht Gleichgewicht?
▶ $\operatorname{ctg} x = 3 \operatorname{tg} \alpha$.

4. **Descartes** (*La Géométrie*, 1637) gibt im letzten Abschnitt des zweiten Buches einen Ausblick auf die analytische Geometrie des Raumes und braucht dort implizit den offensichtlich falschen Satz: «Sind Grund- und Aufriss eines Winkels rechte, so ist der Winkel selbst ein rechter.» Zwischen welchen Grenzen muss ein Winkel liegen, damit er die genannte Bedingung erfüllen kann?
▶ Schneide die Schenkel des Winkels γ mit einer ersten Höhenlinie der Kote 1. Man findet:



$$\overline{AC}^2 = 1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha'' + \operatorname{tg}^2 \alpha' \operatorname{ctg}^2 \alpha''$$

$$\overline{BC}^2 = 1 + \operatorname{tg}^2 \alpha'' + \operatorname{ctg}^2 \alpha' \operatorname{tg}^2 \alpha''$$

$$\overline{AB}^2 = \operatorname{tg}^2 \alpha'' + \operatorname{ctg}^2 \alpha'' + \operatorname{tg}^2 \alpha' \operatorname{ctg}^2 \alpha'' + \operatorname{ctg}^2 \alpha' \operatorname{tg}^2 \alpha'' .$$

$$\cos\gamma = \frac{\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2 - \overline{AB}^2}{2\,\overline{AC}\;\overline{BC}} = \frac{1}{\overline{AC}\;\overline{BC}} ,$$

woraus

$$\sec^2\gamma = 3 + (\operatorname{tg}^2 \alpha' + \operatorname{ctg}^2 \alpha') + (\operatorname{tg}^2 \alpha'' + \operatorname{ctg}^2 \alpha'') + (\operatorname{tg}^2 \alpha' \operatorname{ctg}^2 \alpha'' + \operatorname{ctg}^2 \alpha' \operatorname{tg}^2 \alpha'') .$$

Jeder Klammerausdruck ist als Summe positiver reziproker Zahlen $\geqq 2$, demnach gilt

$$\sec^2\gamma \geqq 9 \quad \text{oder} \quad |\cos\gamma| \leqq 1/3 .$$

Soll $\gamma' = \gamma'' = \gamma''' = 90°$ sein, so gilt nur noch $\cos\gamma = \pm 1/3$. Das ist der Fall bei den Körperdiagonalen eines Würfels in einfachster Lage.

5. Bei gleichen Bezeichnungen wie in Aufgabe 4 sollen die Grösse des Winkels γ und sein Grundriss (also α') gegeben sein. Gesucht ist der Aufriss.
▶ Es ergibt sich eine quadratische Gleichung für $\operatorname{tg}^2 \alpha''$. Die Annahme $\gamma = 105°$ und $\alpha' = 30°$ ergibt für α'' die Werte $\pm 54° 36'$ und $\pm 22° 18'$. Eine elegante Konstruktion habe ich nicht gefunden, vielleicht gelingt es einem Leser.