Eine Bemerkung über stabile Polynome

Unter einem stabilen Polynom verstehen wir im weiteren ein Polynom

$$P(z) = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^{n-\nu}, \quad a_0, \ldots, a_n \text{ reell und } a_0 > 0, \tag{1}$$

das nur Wurzeln mit negativem Realteil besitzt (vgl. [1][1]), S. 403).

Damit (1) stabil ist, muss notwendigerweise

$$a_1 > 0, \ldots, a_n > 0 \tag{2}$$

sein ([1], S. 403).

Wir setzen daher für das Weitere voraus, dass alle betrachteten Polynome positive Koeffizienten besitzen.

Es gilt folgender

Satz 1. Wenn $P(z)$ ein stabiles Polynom ist, so ist auch $P'(z)$ stabil.

Zum Beweis überlegen wir uns, dass definitionsmäss ein konvexes Vieleck derart in der linken komplexen Halbebene aufgespannt werden kann, dass es alle Wurzeln von $P(z)$ enthält. Nach dem Satz von GAUSS-LUCAS folgt dann, dass die Wurzeln von $P'(z)$ in demselben Vieleck liegen, und somit $P'(z)$ auch ein stabiles Polynom ist. Daraus folgt unsere Behauptung.

Nun können wir fragen, ob die obige Aussage gültig bleibt, wenn man den Prozess der Differentiation durch den der Integration ersetzt. Dieses Problem kann man auch so formulieren: Ist es möglich, eine positive reelle Zahl c derart anzugeben, dass mit $P(z)$ auch

$$Q(z, c) =_{Df} \int_0^z P(z)\, dz + c^{2)} \tag{3}$$

stabil ist?

Eine Antwort auf diese Frage gibt der folgende

Satz 2. a) Falls der Grad des Polynoms (1) gleich 1 oder 2 ist, lässt sich immer eine Konstante c mit den obigen Eigenschaften angeben.

b) Ist der Grad des Polynoms (1) grösser als 2, so gibt es Polynome, für die man keine Konstante c mit den obengenannten Eigenschaften angeben kann.

Der Beweis von a) ergibt sich sofort durch direkte Anwendung des HURWITZschen Satzes[3]) auf das integrierte Polynom.

$n = 1$: $$P_1(z) = a_0 z + a_1 .$$

---

[1]) Die Zahlen in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis, S. 106.

[2]) Das Integral ist das übliche Riemannsche Integral.

[3]) (1) ist dann und nur dann stabil, wenn die n Determinanten $\delta_j = |b_{ik}|$, $b_{ik} = a_{2k-i}$ ($a_t = 0$ für $t < 0$, $1 \leqq i \leqq j$) positiv sind ([2], S. 534).

Nach unseren Voraussetzungen zu Beginn dieser Note in (2) ist $P_1(z)$ immer stabil. Integration ergibt

$$Q_1(z, c) = \frac{a_0}{2} z^2 + a_1 z + c .$$

$Q_1(z, c)$ ist genau dann stabil, wenn $c > 0$ ist. Ein solches c kann natürlich immer angegeben werden.

$n = 2$:

$$P_2(z) = a_0 z^2 + a_1 z + a_2 .$$

Durch Integration erhalten wir

$$Q_2(z, c) = \frac{a_0}{3} z^3 + \frac{a_1}{2} z^2 + a_2 z + c .$$

Damit $Q_2(z, c)$ stabil ist, ist notwendig und hinreichend das Erfülltsein der Ungleichung $3a_1 a_2 > 2a_0 c > 0$.

Auch in diesem Fall kann man immer ein c finden, das diesen Bedingungen genügt.

Um jetzt b) zu beweisen, müssen wir zwei Fälle getrennt behandeln.

Fall 1: $n = 3$.

$$P_3(z) = a_0 z^3 + a_1 z^2 + a_2 z + a_3 .$$

Nach den Voraussetzungen in (2) und dem Satz von Hurwitz ist $P_3(z)$ genau dann stabil, wenn $a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$ ist. Integration von $P_3(z)$ liefert

$$Q_3(z, c) = \frac{a_0}{4} z^4 + \frac{a_1}{3} z^3 + \frac{a_2}{2} z^2 + a_3 z + c ;$$

dieses Polynom ist nach dem Satz von Hurwitz dann und nur dann stabil, wenn die Ungleichungen

$$\frac{9\,a_3}{4\,a_1^2} \left(\frac{2\,a_1 a_2}{3} - a_0 a_3\right) > c > 0$$

erfüllt sind. Wählen wir aber $P_3(z)$ derart, dass die Ungleichungen $a_1 a_2 - a_0 a_3 > 0$ und $(2/3)\, a_1 a_2 - a_0 a_3 \leqslant 0$ befriedigt sind, so ist $Q(z, c)$ für keine Wahl von c ein stabiles Polynom.

Fall 2: $n > 3$[4]. Wir verwenden jetzt nicht das für grössere n sehr unbequeme algebraische Kriterium von Hurwitz, sondern das geometrische Lücken- und Lagekriterium, zu dessen Anwendung einige Vorbereitungen notwendig sind. Setzt man $z = i\omega$, ω reell, so erhält man aus (1) nach Aufteilung in Real- und Imaginärteil

$$P(i\omega) = U(\omega^2) + i\omega V(\omega^2) . \tag{4}$$

Dasselbe machen wir mit dem Polynom $Q(z, c)$. In dem Fall, dass der Grad n von $P(z)$ eine gerade Zahl ist, ergibt sich

$$Q(z, c) = \int_0^z \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu z^{n-\nu}\, dz + c = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{a_\nu}{n-\nu+1} z^{n-\nu+1} + c$$

und

$$Q(i\omega, c) = \sum_{\lambda=0}^{n/2-1} \frac{a_{2\lambda+1}}{n-2\lambda} (-1)^{n/2-\lambda} (\omega^2)^{n/2-\lambda} + c + i\omega \sum_{\mu=0}^{n/2} \frac{a_{2\mu}}{n-2\mu+1} (-1)^{n/2-\mu} (\omega^2)^{n/2-\mu} .$$

Beachtet man noch, dass

$$P(i\,\omega) \equiv U(\omega^2) + i\,\omega\,V(\omega^2) = \sum_{\mu=0}^{n/2} a_{2\mu}(-1)^{n/2-\mu}\,(\omega^2)^{n/2-\mu}$$
$$+\,i\,\omega \sum_{\lambda=0}^{n/2-1} a_{2\lambda+1}\,(-1)^{n/2-\lambda-1}\,(\omega^2)^{n/2-\lambda-1}$$

ist, so erhält man

$$Q(i\,\omega, c) = \left[-\int_0^{\omega} \omega\,V(\omega^2)\,d\omega + c\right] + i\left[\int_0^{\omega} U(\omega^2)\,d\omega\right]. \tag{5}$$

Wenn der Grad n von $P(z)$ eine ungerade Zahl ist, ergibt eine analoge Rechnung dasselbe Resultat wie in (5).

Dabei wollen wir festhalten, dass der Grad von $U(\omega^2)$ bzw. $V(\omega^2)$ bezüglich ω^2 gleich $n/2$ bzw. $(n-2)/2$ ist, wenn (1) von geradem Grad ist und gleich $(n-1)/2$ in beiden Fällen, wenn (1) ungeraden Grad besitzt.

Nun formulieren wir das sogenannte Lücken- und Lagekriterium[5]: Das Polynom (1) ist genau dann stabil, wenn die Polynome $U(\omega^2)$ und $\omega\,V(\omega^2)$ aus (4) lauter reelle, einfache Nullstellen besitzen, die sich gegenseitig trennen.

Um unsere Behauptung zu beweisen, genügt es, zu jedem $n > 3$ ein stabiles Polynom $P(z)$ vom Grade n derart zu konstruieren, dass das Polynom

$$\int_0^{\omega} U(\omega^2)\,d\omega \tag{6}$$

mindestens zwei komplexe Nullstellen besitzt, wobei $U(\omega^2)$, wie in (4), der Realteil von $P(i\,\omega)$ ist. Dann kann nämlich nach dem Lücken- und Lagekriterium das Polynom $Q(z, c)$ für keine Wahl von c stabil sein, obwohl $P(z)$ stabil ist; denn (6) ist gerade der Imaginärteil von $Q(i\,\omega, c)$, und dieser darf, wenn $Q(z, c)$ stabil wäre, nur reelle Nullstellen besitzen.

Es sei jetzt $n > 3$ eine natürliche Zahl. Weiter

1. $m = \begin{cases} n & \text{wenn } n \text{ gerade ist} \\ n-1 & \text{wenn } n \text{ ungerade ist} \end{cases}$

2. $U^*(\omega^2) = \begin{cases} (\omega^2-1)^2 \ldots (\omega^2 - m/4)^2 - \varepsilon, & \text{wenn } m/2 \text{ gerade ist} \\ \omega^2(\omega^2-1)^2 \ldots (\omega^2 - (m-2)/4)^2 - \varepsilon, & \text{wenn } m/2 \text{ ungerade ist} \end{cases}$

3. $\varepsilon > 0$ werde so klein gewählt, dass $U^*(\omega^2)$ lauter einfache, reelle Nullstellen besitzt und $\int_0^{\omega} U^*(\omega^2)\,d\omega$ höchstens zwei reelle Nullstellen.

4. $k = \begin{cases} n-2 & \text{wenn } n \text{ gerade ist} \\ n-1 & \text{wenn } n \text{ ungerade ist} \end{cases}$

5. $V^*(\omega^2)$ sei ein Polynom vom Grad $k/2$ bezüglich ω^2, wobei $\omega\,V^*(\omega^2)$ lauter einfache reelle Wurzeln besitzen soll, die die Wurzeln von $U^*(\omega^2)$ trennen.

---

[4]) Der Grundgedanke zu diesem Beweis entstammt einer Diskussion mit Herrn W. Hahn.

[5]) Das Lücken- und Lagekriterium, als ein spezielles geometrisches Stabilitätskriterium wird in [3], S. 192–195 behandelt. Es ist eine Folge des Ortskurvenkriteriums, vgl. [4], S. 95–97.

Jetzt bildet man das Polynom

$$P^*(i\,\omega) = U(\omega^2) + i\,\omega\,V^*(\omega^2) = U^*[-(i\,\omega)^2] + (i\,\omega)\,V^*[-(i\,\omega)^2]\,. \qquad (7)$$

Nun setzen wir $i\,\omega = z$ und erhalten aus (7) ein Polynom $P^*(z)$, wobei $P^*(z)$ den Grad n besitzt. Nach unserer Konstruktionsvorschrift ist $P^*(z)$ stabil und $Q^*(z, c)$, das wie in (3) aus $P^*(z)$ gewonnen wird, ist für keine Wahl von c stabil. Somit ist unsere Behauptung bewiesen. R. Z. DOMIATY, Graz

LITERATUR

[1] W. KAPLAN, *Operational Methods for Linear Systems*, Reading 1962.
[2] A. HURWITZ, *Mathematische Werke*, Band II, Basel 1933.
[3] K. KLOTTER, *Technische Schwingungslehre*, Band 2, Springer-Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg 1960.
[4] R. ZURMÜHL, *Praktische Mathematik*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 1965.

Kleine Mitteilungen

Note on Integration by Residues

In a recent note [3] MELAMED and KAUFMAN point out the advantage of evaluating an integral of the form

$$\int_0^\infty t^\alpha f(t^n)\,dt \qquad (1)$$

by considering the integral

$$\int_C z^\alpha f(z^n)\,dz$$

where C is the boundary of an appropriate sector. I should like to suggest a further simplification: begin by making the change of variable $t^n = x$, so that (1) becomes

$$n^{-1}\int_0^\infty x^{(\alpha+1-n)/n} f(x)\,dx\,,$$

which can be evaluated by integrating around the conventional contour for multiple-valued functions (a large circle with a cut along the positive real axis). If we are going to have a multiple-valued function to deal with anyway we may as well keep the rest of the integrand as simple as possible. (Cf. [1], p. 248, problem 83.) Indeed, the change of variable works equally well for the integrals (1) with $\alpha = 0$ considered in [2]; although it introduces a multiple-valued function where none appeared originally, the required residue is often simpler to calculate after the change of variable.

R. P. BOAS, JR., Northwestern University, Evanston, Illinois

REFERENCES

[1] P. FRANKLIN, *Methods of Advanced Calculus* (McGraw-Hill, 1944).
[2] S. MELAMED and H. KAUFMAN, *Evaluation of Certain Improper Integrals by Residues*, Amer. Math. Monthly *72*, 1111–1112 (1965).
[3] S. MELAMED and H. KAUFMAN, *Integration of Multiple-Valued Functions by Residues*, El. Math. *21*, 37–39 (1966).