Über eine Vertauschbarkeit von Addition und Multiplikation

Über eine Vertauschbarkeit von Addition und Multiplikation

Sei N die Menge der natürlichen Zahlen 1, 2, … versehen mit der üblichen Addition und Multiplikation. Es bezeichne α die Additionsabbildung

$$\alpha\colon N \times N \to N\colon (a, b) \to a + b$$

und μ die Multiplikationsabbildung

$$\mu\colon N \times N \to N\colon (a, b) \to a\, b\, .$$

Eine bijektive Abbildung $\pi\colon N \times N \to N$ heisst Peano-Abbildung. Mit diesen Bezeichnungen lautet ein Problem von ULAM ([3], Seite 32): Gibt es eine Peano-Abbildung π, so dass $\mu\,\pi^{-1}\,\alpha = \alpha\,\pi^{-1}\,\mu$ auf $N \times N$ gilt? Diese Frage ist von GAO [1] und KOPFERMANN [2] negativ beantwortet worden. Es stellt sich deshalb das folgende Problem: Existieren zwei Peano-Abbildungen π und ϱ mit der Eigenschaft $\mu\,\pi^{-1}\,\alpha = \alpha\,\varrho^{-1}\,\mu$? Allgemeiner kann man fragen, in welchem Sinne Addition und Multiplikation vertauschbar oder nicht vertauschbar sind. Ein Resultat in dieser Richtung enthält der

Satz: 1. *Es gibt keine Peano-Abbildungen* π, ϱ, σ, τ *mit* $\sigma^{-1}\,\mu\,\pi^{-1}\,\alpha = \tau^{-1}\,\alpha\,\varrho^{-1}\,\mu$ *auf* $N \times N$.

2. *Es gibt Peano-Abbildungen* π, ϱ, σ, τ *mit* $\mu\,\pi^{-1}\,\alpha\,\sigma^{-1} = \alpha\,\varrho^{-1}\,\mu\,\tau^{-1}$ *auf* N.

Um den ersten Teil des Satzes zu beweisen, nehme man an, es gäbe Peano-Abbildungen π, ϱ, σ, τ, für die das folgende Diagramm kommutativ ist.

$$\begin{tikzcd}
 & N \arrow[r, "\pi^{-1}"] & N \times N \arrow[r, "\mu"] & N \arrow[dr, "\sigma^{-1}"] & \\
N \times N \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[dr, "\mu"'] & & & & N \times N \\
 & N \arrow[r, "\varrho^{-1}"'] & N \times N \arrow[r, "\alpha"'] & N \arrow[ur, "\tau^{-1}"'] &
\end{tikzcd}$$

Offenbar ist $\alpha^{-1}(n)$ nur für $n = 1$ leer, was $\pi\,\mu^{-1}\,\sigma\,\tau^{-1}(1) = \{1\}$ zur Folge hat, und $\mu^{-1}(n)$ nur für $n = 1$ einelementig, weshalb $\sigma\,\tau^{-1}(1) = \{1\}$ gilt. Ferner enthält $\pi\,\mu^{-1}\,\sigma\,\tau^{-1}(2)$ zwei verschiedene Elemente $a > 1$, $b > 1$. Weil $\varrho\,\alpha^{-1}(2)$ einelementig ist, folgt $\mu\,(1, a-1) = \mu\,(1, b-1)$ und daraus der Widerspruch $a = b$.

Im nachfolgenden zweiten Teil des Beweises werden induktiv Peano-Abbildungen π, ϱ sowie eine Bijektion φ von $N \times N$ auf sich konstruiert, die das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
N \times N \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dd, "\varphi"'] & N \arrow[r, "\pi^{-1}"] & N \times N \arrow[dr, "\mu"] & \\
 & & & N \\
N \times N \arrow[r, "\mu"'] & N \arrow[r, "\varrho^{-1}"'] & N \times N \arrow[ur, "\alpha"'] &
\end{tikzcd}$$

kommutativ machen. Weil am rechten Ende des Diagramms jede natürliche Zahl $n > 1$ auftreten kann, definiere man $\pi(1, 1) := 1$ und weiter

$$\pi(1, 2) := 2,\ \pi(2, 1) := 3,$$

$$\varrho(1, 1) := 4,$$

$$\varphi(1, 1) := (1, 4),\ \varphi(1, 2) := (2, 2),\ \varphi(2, 1) := (4,1)\, .$$

Dann kommutiert die Figur für alle Urbilder von $n = 2$, nämlich für (1, 1), (1, 2), (2, 1). Für ein $n > 2$ seien Injektionen π von $\mu^{-1}\{1, 2, \ldots, n-1\}$ in N und ϱ von $\alpha^{-1}\{1, 2, \ldots, n-1\}$ in N sowie eine Bijektion φ von $\alpha^{-1}\pi\mu^{-1}\{1, \ldots, n-1\}$ auf $\mu^{-1}\varrho\alpha^{-1}\{1, \ldots, n-1\}$ so definiert, dass das Diagramm kommutativ ist. Hat dann n die Primfaktorzerlegung $n = \prod_\nu p_\nu^{q_\nu}$ mit paarweise verschiedenen Primzahlen p_ν, so existieren genau $m_n := \prod (q_\nu + 1)$ formal verschiedene Zerlegungen $n = a_\nu b_\nu$ in natürliche Zahlen a_ν, b_ν $(1 \leqslant \nu \leqslant m_n)$. Wenn $N - \varrho\alpha^{-1}\{1, \ldots, n-1\} =: \{c_1, c_2, \ldots\}$ mit $c_1 < c_2 < \ldots$ ist, dann definiere man $\varrho(1, n-1) := c_1$, $\varrho(2, n-2) := c_2, \ldots,$ $\varrho(n-2, 2) := c_{n-2}$.

Ferner setze man $\pi(a_1, b_1) := d_1, \ldots, \pi(a_{m_n-1}, b_{m_n-1}) := d_{m_n-1}$, sofern $N - \pi\mu^{-1}\{1, \ldots, n-1\} =: \{d_1, d_2, \ldots\}$ mit $d_1 < d_2 < \ldots$ gilt. Sodann wähle man $\pi(a_{m_n}, b_{m_n})$ aus $N - (\pi\mu^{-1}\{1, \ldots, n-1\} \cup \{d_1, \ldots, d_{m_n-1}\})$ so gross, dass

$$\pi(a_1, b_1) + \cdots + \pi(a_{m_n}, b_{m_n}) - m_n \geqslant m_{\varrho(1, n-1)} + \cdots + m_{\varrho(n-2, 2)} + 2$$

gilt. Da es beliebig grosse natürliche Zahlen l gibt, für die m_l einen vorgegebenen Wert $\geqslant 2$ hat, kann man eine Zahl $\varrho(n-1, 1)$ aus $N - (\varrho\alpha^{-1}\{1, \ldots, n-1\} \cup \{c_1, \ldots, c_{n-2}\})$ mit der Eigenschaft

$$\pi(a_1, b_1) + \cdots + \pi(a_{m_n}, b_{m_n}) - m_n = m_{\varrho(1, n-1)} + \cdots + m_{\varrho(n-2, 2)} + m_{\varrho(n-1, 1)}$$

bestimmen. Dann haben die Mengen $\alpha^{-1}\pi\mu^{-1}(n)$ und $\mu^{-1}\varrho\alpha^{-1}(n)$ gleiche Elementezahl, und φ lässt sich fortsetzen zu einer Bijektion von $\alpha^{-1}\pi\mu^{-1}\{1, \ldots, n\}$ auf $\mu^{-1}\varrho\alpha^{-1}\{1, \ldots, n\}$. Auf diese Weise sind rekursiv Peano-Abbildungen π, ϱ und eine Bijektion φ von $N \times N$ auf sich mit der Eigenschaft $\mu\pi^{-1}\alpha = \alpha\varrho^{-1}\mu\varphi$ konstruiert. Nimmt man für τ schliesslich eine beliebige Peano-Abbildung und setzt $\sigma := \tau\varphi$, dann gilt $\mu\pi^{-1}\alpha\sigma^{-1} = \alpha\varrho^{-1}\mu\tau^{-1}$, womit auch der zweite Teil des Satzes bewiesen ist.

J. SPILKER, Freiburg i. Br.

LITERATUR

[1] H. GAO, *Solution to a Problem of S. Ulam*, Sci. Sinica *13*, 1005–1006 (1964).
[2] K. KOPFERMANN, *Lösung eines Problems über Peano-Abbildungen*, Math.-Phys. Semesterber. *10*, 273–275 (1964).
[3] S. ULAM, *A Collection of Mathematical Problems*, Interscience, New York 1960.

Zur Zerlegung von Permutationen in elementfremde Zyklen

1. Definitionen und Bezeichnungen

Ausgehend von der Tatsache, dass jede Permutation φ abgesehen von der Reihenfolge auf genau eine Weise in elementfremde Zyklen zerfällt[1]), ordnen wir φ ihre *Zyklenzahl* $z(\varphi)$ zu; hierbei sind die eingliedrigen Zyklen mitzuzählen. Eine Permutation φ von n Elementen mit $z(\varphi) = k$ nennen wir fortan eine (n, k)-*Permutation*, und es bezeichne $p(n, k)$ deren Anzahl. Die $(n, 1)$-Permutationen werden auch «zyklisch» genannt, und im Falle $n \geqslant 2$ heissen die $(n, n-1)$-Permutationen *Transpositionen*.

Es sollen in dieser Note die Zahlen $p(n, k)$ bestimmt und eine durch sie auf natürliche Weise induzierte Klassifikation der Permutationen betrachtet werden. Dabei beschränken wir uns auf die Behandlung des nichtentarteten Falles $1 \leqslant k \leqslant n$.

[1]) Vergleiche zum Beispiel [1], p. 10 oder [3], p. 28.