Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 22 (1967)
Heft: 6

Rubrik: Aufgaben

Nun betrachten wir die Verallgemeinerungen für den n-dimensionalen Raum E^n!

Es bedeute jetzt R_i ($i = 0, 1, 2, \ldots n$) den Abstand PA_i, wo P ein beliebiger Punkt im Innern oder auf dem Rande des n-dimensionalen Simplex $A_0 A_1 A_2 \ldots A_n$ ist; r und h_i haben dieselbe Bedeutung wie in der Einleitung (Inkugelradius und Höhen); V ist der Inhalt des Simplex.

Bekannt ist die Verallgemeinerung von (3) auf E^n [4]. Jetzt beweisen wir:

Satz II. Es gilt folgende Verallgemeinerung von (2) auf den E^n:

$$R_0 + R_1 + R_2 + \ldots + R_n \geqq (n+1)\, n\, r. \tag{2*}$$

Beweis. Die Ungleichung von Petty und Waterman lautet [5]:

$$\sum_{i=0}^{n} R_i \geqq (n+1)^{(n-1)/2n} (n!)^{1/n} V^{1/n} \sqrt{n}. \tag{I}$$

Andererseits findet man bei L. Fejes Tóth auch eine Simplexungleichung [6]:

$$V \geqq \frac{(n+1)^{(n+1)/2}}{n!} n^{n/2} r^n. \tag{II}$$

Wenden wir die Substitution von (II) in der Ungleichung (I) an, so ergibt sich:

$$A(R_i) = \frac{\sum_{i=0}^{n} R_i}{n+1} \geqq n\, r.$$

Für $n = 3$ lautet die Ungleichung:

$$R_0 + R_1 + R_2 + R_3 \geqq 12\, r.$$

Bemerkungen. Die vollständige Verallgemeinerung von (1) für $n = 3$ ist noch nicht bekannt. Vielleicht geben eine Arbeit von J. Steinig [6] und diese Arbeit gewisse Stützpunkte in dieser Richtung.

Der Verfasser dankt Herrn J. Steinig für nützliche Bemerkungen.

J. Berkes, Szeged

LITERATURVERZEICHNIS

[1] Mordell, L. J., *Lösung der Aufgabe 3740 von P. Erdös*, Amer. Math. Monthly *44*, 252 (1937).

[2] M. Schreiber, *Aufgabe 196*, Jber. dtsch. Math.-Ver. *45* (1935).

[3] F. Leuenberger, *Einige Dreiecksungleichungen*, El. Math. *13*, 121–126 (1958).

[4] F. Leuenberger, *Extremaleigenschaften der wichtigsten Ecktransversalen des n-dimensionalen Simplex*, El. Math. *15*, 81–82 (1960).

[5] Petty und Waterman, *An Extremal Theorem for N-Simplexes*, Monatshefte Math. *59*, 320–322 (1955).

[6] J. Steinig, *A Comparison of Two Inequalities for the Triangle*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. *16*, 19–22 (1965).

Aufgaben

Aufgabe 537. Ein gegebener Kreis K wird von zwei zueinander orthogonalen Kreisen K_1, K_2, die durch einen festen Punkt F seiner Ebene gehen, berührt. Welches ist der geometrische Ort der Ähnlichkeitszentren von K_1 und K_2?

C. Bindschedler, Küsnacht

Lösung des Aufgabenstellers: Durch eine Inversion mit Zentrum F, die K in sich überführt, gehen K_1 und K_2 in zwei zueinander senkrechte Tangenten K_1', K_2' über. Dem äusseren Ähnlichkeitszentrum A in der ursprünglichen Figur Φ entspricht in der transformierten Φ' der zweite Schnittpunkt A' zweier durch F gehender und die Geraden K_1', K_2' berührender Kreise. Diese Geraden zerlegen die Ebene in zwei Paare von Scheitelwinkelfelder. Gehört (*Fall a*) F dem Felderpaar an, in dem K liegt (gleichzeitige Berührung von K_1 und K_2 mit K), so ist (mit O als Zentrum von K) $\overline{OA'} = \overline{OF}$. Der Ort von A' ist also ein zu K konzentrischer Kreis durch F, dem in der Figur Φ eine *Gerade l* entspricht (l ist die Potenzlinie von K und dem als Nullkreis aufgefassten Punkt F). Dem inneren Ähnlichkeitspunkt J von K_1, K_2 entspricht der zu A' symmetrische Punkt J' inbezug auf den Schnittpunkt Q' von K_1', K_2', da die 4 Punkte F, Q, A, J harmonisch auf dem Kreis über dem Durchmesser $\overline{AJ}$ liegen. J' liegt damit auch symmetrisch zu F inbezug auf eine Tangente des Kreises um O durch Q'. Der Ort von J' ist ähnlich zur Fusspunktskurve dieses Kreises für den Pol F. Die Gleichung in Polarkoordinaten mit F als Pol ergibt sich unmittelbar, wenn man beachtet, dass jene Fusspunktskurve Konchoide des Kreises über dem Durchmesser $\overline{OF}$ mit F als Pol und $r\sqrt{2}$ $(= \overline{OQ'})$ als Einschaltstrecke ist. Mit $d = \overline{OF}$ wird $\varrho = 2\left(d\cos\varphi - r\sqrt{2}\right)$ und folglich liegt J auf dem *Kegelschnitt*

$$\varrho = \frac{d^2 - r^2}{2\,r\sqrt{2}\,\left(d(r\sqrt{2})^{-1} - 1\right)}$$

mit Brennpunkt F und numerischer Exzentrizität $d/r\sqrt{2}$. Als zugehörige Leitlinie erkennt man leicht jene Gerade l, welche die äusseren Ähnlichkeitspunkte enthält. Liegt (*Fall b*) F in einem der anderen Winkelfelder von K_1', K_2' (ungleichartige Berührung von K_1, K_2 mit K) so kehren sich die Verhältnisse einfach um: der äussere Ähnlichkeitspunkt liegt auf dem Kegelschnitt, der innere auf l. Geht bei kontinuierlicher Veränderung ein Kreis K_1 von äusserer zu innerer Berührung mit K über (oder umgekehrt), wobei der Radius unendlich wird, so gehen gleichzeitig A und J wechselseitig stetig ineinander über.

Eine weitere Lösung sandte J. Basile (Brüssel).

Aufgabe 538. Trouver toutes les solutions de l'équation

$$x^2 + (x+1)^2 = y^4$$

en nombres naturels x et y. W. Sierpiński, Varsovie

Solution: W. Ljunggren (Avh. det Norske Videnskaps-Akad., Oslo, Mat.-Nat. Kl. 1942, No. 5) a démontré, que l'équation $z^2 + 1 = 2y^4$ n'a, en nombres naturels y et z, que deux solutions $y = z = 1$ et $y = 13$, $z = 239$. Il en résulte que l'équation $(2x+1)^2 + 1 = 2y^4$ n'a, en nombres naturels x et y, qu'une seule solution: $x = 119$, $y = 13$. Or cette dernière équation est évidemment équivalente à l'équation $x^2 + (x+1)^2 = y^4$ qui admet ainsi une seule solution en nombres naturels x et y, notamment $x = 119$, $y = 13$.

Or, M. A. Makowski a remarqué que L. E. Dickson dans le vol. II de son *History of the Theory of Numbers* à la page 627 écrit que A. Cunningham en 1908 regardait comme solutions uniques de l'équation $x^2 - 2y^4 = -1$ en nombres naturels $x = y = 1$ et $x = 239$, $y = 13$, et que à la page 670–671 du livre cité Dickson écrit, que E. Lionnet en 1880 cherchait les nombres naturels N qui, en même temps que leur bicarrés, sont sommes de deux carrés de nombres naturels consécutifs et que E. Lionnait écrivait que la solution unique est $N = 13 = 2^2 + 3^2$ où $N^4 = 13^4 = 119^2 + 120^2$. Or, à la page 622 de son livre Dickson écrit (dans la note [53])) que E. Fauquembergue (dans l'Intermédiaire des math. *5*, 1898, p. 94) affirmait que $x = 1$ et $x = 13$ sont les nombres naturels uniques pour lesquels le nombre $2x^4 - 1$ est un carré. A. Schinzel, Varsovie

Dieselbe Lösung sandte L. Carlitz (Duke University, USA).

Aufgabe 539. Show that the quotient

$$\frac{(a^n - 1)(a^n - a)\dots(a^n - a^{n-1})}{n!} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

is integral for arbitrary integers a. L. Carlitz, Duke University, Durham, N.C., USA

Lösung: Der Zähler des gegebenen Bruches ist

$$Z(a, n) = \prod_{k=0}^{n-1} (a^n - a^k) = a^{n(n-1)/2} \prod_{k=0}^{n-1} (a^{n-k} - 1).$$

Man hat bekanntlich folgende Primfaktorzerlegung von n!

$$n! = \prod_{p \leqq n} p^{\alpha(p)}, \quad \alpha(p) = \sum_{k=1}^{\infty} [n/p^k].$$

Für die Exponenten $\alpha(p)$ gelten offensichtlich die Abschätzungen

$$\alpha(p) \leqq \left[\sum_{k=1}^{\infty} n/p^k\right] \leqq \left[\frac{n}{p-1}\right], \tag{1}$$

$$\alpha(p) \leqq \alpha(2) < \sum_{k=1}^{\infty} n/2^k = n, \quad \alpha(p) \leqq n - 1. \tag{2}$$

p sei nun eine Primzahl $\leqq n$. Im Fall $p \mid a$ folgt aus (2) $\alpha(p) \leqq n - 1 \leqq n(n-1)/2$, weil $n \geqq p \geqq 2$. Somit gilt $p^{\alpha(p)} \mid Z(a, n)$. Wenn $p \nmid a$, so ist $p \mid a^{n-k} - 1$ dann und nur dann richtig, wenn $p - 1 \mid n - k$. Unter den Faktoren $a^{n-k} - 1$ ($k = 0, 1, \ldots, n-1$) sind daher genau $[n/(p-1)]$ durch p teilbar und (1) zeigt, dass auch in diesem Fall $p^{\alpha(p)} \mid Z(a, n)$.

A. Bager, Hjørring, Dänemark

Weitere Lösungen sandten W. Jänichen (Berlin-Zehlendorf), E. Teuffel (Korntal/Stuttgart).

Aufgabe 540. Sei $a_{-1}\, a_0\, a_1\, a_2\, a_3\, a_4\, a_5 \ldots = 1\ 0\ 1\ 1\ 2\ 3\ 5 \ldots$ die Fibonaccifolge. Für $n = -1, 0, 1, 2, \ldots$ und $k = 0, 1, 2, \ldots$ zeige man

$$\sum_{\nu=-1}^{n} \binom{n+k-\nu}{k} a_\nu + \sum_{\nu=0}^{k} \binom{n+1+k-\nu}{1+n} a_{2\nu} = a_{n+2k+2}.$$

I. Paasche, München

Lösung (nach E. Widmer, Biel): Es sei $A(n, k)$ die zu beweisende Aussage. Es gilt die Implikation

$$A(n, k) \text{ und } A(n+1, k-1) \Rightarrow A(n+1, k). \tag{*}$$

Beweis: Aus den Grundeigenschaften der Binomialkoeffizienten und der Formel $a_i + a_{i+1} = a_{i+2}$ folgt

$$\begin{aligned}
&\sum_{\nu=-1}^{n+1} \binom{n+1+k-\nu}{k} a_\nu + \sum_{\nu=0}^{k} \binom{n+2+k-\nu}{2+n} a_{2\nu} \\
&= \sum_{\nu=-1}^{n+1} \binom{n+k-\nu}{k-1} a_\nu + \sum_{\nu=-1}^{n+1} \binom{n+k-\nu}{k} a_\nu + \sum_{\nu=0}^{k} \binom{n+1+k-\nu}{1+n} a_{2\nu} \\
&\qquad + \sum_{\nu=0}^{k} \binom{n+1+k-\nu}{2+n} a_{2\nu} \\
&= a_{n+2k+2} + \sum_{\nu=-1}^{n+1} \binom{n+1+k-1-\nu}{k-1} a_\nu + \sum_{\nu=0}^{k-1} \binom{n+2+k-1-\nu}{2+n} a_{2\nu} \\
&= a_{n+2k+2} + a_{n+1+2(k-1)+2} = a_{(n+1)+2k+2}.
\end{aligned}$$

Ordnet man die $A(n, k)$ in der Form einer unendlichen Matrix an, so bedeutet (*), dass ein «Element richtig ist», wenn dies sowohl für den oberen als auch für den linken Nachbarn gilt. Man muss also zeigen, dass die Elemente $A(n, 0)$ ($n = -1, 0, 1, 2, \ldots$) der ersten Spalte und die Elemente $A(-1, k)$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$) der ersten Zeile richtig sind.

Dazu benutzt man folgende Formeln, die sich unmittelbar aus der Rekursionsformel für die Fibonaccizahlen ergeben:

$$\sum_{\nu=-1}^{n} a_\nu = a_{n+2}, \quad \sum_{\nu=0}^{k} a_{2\nu} = a_{2k+1} - 1 .$$

Die Aufgabe ist ein Spezialfall der Aufgabe 523 (El. Math. *22*, 41 (1967)).

Weitere Lösungen sandten A. AMMANN (Yverdon), L. CARLITZ (Duke University, Durham, USA).

Neue Aufgaben

Aufgabe 561. $N_1 = 1 < N_2 < N_3 < \ldots$ seien die der Grösse nach geordneten natürlichen Zahlen N, die durch den Quotienten

$$(x^2 - 6xy + y^2) : (x^2 - 10xy + y^2)$$

mit ganzen, nicht gleichzeitig verschwindenden x, y dargestellt werden (vgl. Aufgabe 513, El. Math. *21*, 136–137 (1966)). Man zeige, dass jedes N_i durch die eigentlich primitive quadratische Form

$$(14, 20, 7) = 14x^2 + 20xy + 7y^2$$

darstellbar ist, wobei $x^2 = 2N_{i-1} - 1$ und $y^2 = 3N_{i-1} - 2$.

W. JÄNICHEN, Berlin-Zehlendorf

Aufgabe 562. Show that

$$\sum_{r,s=0}^{m} (-1)^{r+s} \binom{m}{r} \binom{m}{s} \binom{r+s}{r}^2 = \sum_{j+k \leqq m} \left(\frac{m!}{j!\,k!\,(m-j-k)!} \right)^2 .$$

L. CARLITZ, Duke University, Durham, N.C., USA

Aufgabe 563. Man zeige, dass für alle ganzen Zahlen $n \geqq 3$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{k/2}{n-1} = 0 .$$

G. BACH, Braunschweig

Aufgabe 564. Ein Glücksspiel wird nach folgender Regel gespielt: In einer Urne befinden sich n Kugeln, die die Nummern $1, 2, \ldots, n$ tragen. Ein Spieler darf nach Entrichtung eines Einsatzes diese Kugeln einzeln nacheinander aus der Urne ziehen, und wenn darunter r Kugeln sind, die beim $s$ten Zug die Nummer s trugen, erhält er den $r$fachen Betrag seines Einsatzes zurück.

Man beurteile die Gewinnchance des Spielers unter der Voraussetzung, dass alle möglichen Ausfälle gleichwahrscheinlich sind.

O. REUTTER, Ochsenhausen

Aufgaben für die Schule

Es wird kein Anspruch auf Originalität der Aufgaben erhoben; Autoren und Quellen werden im allgemeinen nicht genannt. Die Daten für Aufgaben aus der Darstellenden Geometrie sind durchwegs so festgelegt, dass der Ursprung des Koordinatensystems in der Mitte des linken Randes eines Blattes von Format A4 gewählt werden soll, x-Achse nach rechts, y-Achse nach vorn, z-Achse nach oben, Einheit 1 cm. Anregungen und Beiträge sind zu senden an Prof. Dr. WILLI LÜSSY, Büelrainstrasse 51, Winterthur

1. Auf der inneren Winkelhalbierenden w_α des Dreiecks ABC trägt man von A aus nach beiden Seiten die Strecken $AP = AQ = \sqrt{bc}$ ab. Zeige, dass die Punkte B, C, P und Q auf einem Kreis liegen.

2. In einer Ebene sind gegeben ein Kreis k mit dem Zentrum M und dem Radius r, sowie zwei Geraden p und q, die sich in S schneiden und von M denselben Abstand d haben. Konstruiere alle Tangenten an k, für die der Berührungspunkt Mitte des Abschnitts zwischen p und q ist.

▶ Die Aufgabe hat stets zwei triviale Lösungen. Die Tangente einer der nicht-trivialen Lösungen schneide p in P, q in Q. Der Umkreis des Dreiecks PQS geht durch M. Das Dreieck MPQ hat folglich bekannte Basiswinkel; es lässt sich konstruieren und durch eine Rotation in die richtige Lage bringen. Die nicht-trivialen Lösungen existieren für $d^2 < r\,\overline{MS}$; für $d^2 = r\,\overline{MS}$ fallen sie mit einer der trivialen zusammen.

3. Man betrachtet die Evolvente eines Kreises mit dem Radius r vom Anfangspunkt A bis zu einem Punkt P, der zum Zentriwinkel $t = T$ des abgewickelten Bogens gehört. Von dieser ersten Evolvente wird mit demselben Anfangspunkt die zweite Evolvente gezeichnet, von dieser die dritte, und so weiter. Berechne die Bogenlänge der $n$ten Evolvente.

▶ Die Kenntnis des Momentanzentrums bei jeder Abwicklung liefert:

$$ds_1 = r\,t\,dt, \qquad s_1 = r\,\frac{T^2}{2},$$

$$ds_2 = r\,\frac{t^2}{2}\,dt, \quad s_2 = r\,\frac{T^3}{3!},$$

folglich

$$s_n = r\,\frac{T^{n+1}}{(n+1)!}.$$

4. An einen Kreis mit dem Zentrum M und dem Radius r wird eine Tangente gelegt. Vom Berührungspunkt B wird darauf die Strecke $BA = u$ abgetragen. Eine Sekante durch A bildet mit der Tangente den Winkel x und schneidet den Kreis in C und D. Für welches x ist die Fläche des Dreiecks BCD ein Maximum?

▶ Setzt man $u = r \operatorname{ctg}\alpha$, so ist das Maximum der Funktion

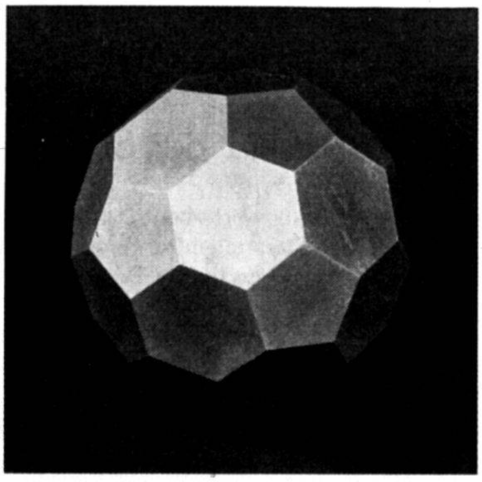
$$f(x) = \sin x \sqrt{\sin^2\alpha - \sin^2(x-\alpha)}$$

zu suchen.

$$\operatorname{tg} x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 3\operatorname{tg}^2 2\alpha}}{\operatorname{tg} 2\alpha}$$

Es gilt eines der beiden Vorzeichen der Wurzel.

5. Die Oberfläche eines modernen Fussballs setzt sich aus schwarzen Fünfecken und weissen Sechsecken zusammen. An die Seiten jedes Fünfecks grenzen lauter Sechsecke, an die Seiten jedes Sechsecks abwechselnd Fünf- und Sechsecke. Berechne die Anzahl der Fünfecke (x) und der Sechsecke (y). O. Reutter, Ochsenhausen.



▶ Aus den Gleichungen

$$f = x + y$$

$$5x = 3y$$

$$2k = 3e = 5x + 6y$$

$$e + f = k + 2$$

ergibt sich die eindeutige Lösung

$$x = 12, \quad y = 20, \quad e = 60, \quad f = 32, \quad k = 90.$$

Der zugehörige Archimedische Körper ist das abgeeckte Ikosaeder.

Mit dieser 72. Serie der *Aufgaben für die Schule* wird die regelmässige Veröffentlichung dieser Spalte abgeschlossen. Der Unterzeichnete dankt allen, die ihm Anregungen zukommen liessen, für ihre Mitarbeit. Er nimmt auch weiterhin Beiträge entgegen, die bei Eignung in freibleibenden Abständen erscheinen sollen. W. Lüssy

Literaturüberschau

Lehrbuch der linearen Algebra. Par Walter Nef. 276 pages. Fr./DM 48.50. Birkhäuser Verlag, Basel und Stuttgart 1966 (Mathematische Reihe, Band 31).

L'excellent ouvrage de M. Walter Nef, professeur de mathématiques à l'Université de Berne, a pour point de départ un cours de base professé maintes fois par l'auteur à l'Université de Berne. Il s'adresse à des étudiants faisant leur second semestre universitaire et pour qui les mathématiques constituent aussi bien une branche principale qu'une discipline secondaire (actuaires, astronomes, physiciens, chimistes, etc.). Pour sa lecture, il demande uniquement les connaissances préalables fournies par l'enseignement gymnasial des mathématiques ainsi que des aptitudes au raisonnement abstrait.

Pour se limiter à l'essentiel, l'auteur ne parle que d'espaces vectoriels réels et complexes dans les treize premiers chapitres de son livre et se place sur un terrain plus général seulement dans le 14me et dernier chapitre consacré aux sous-espaces invariants et aux formes normales des matrices et où il est question d'espaces vectoriels définis sur un corps quelconque.

L'auteur insiste sur l'importance des applications de l'Algèbre linéaire et consacre un chapitre substantiel à la programmation linéaire, un autre à la théorie des jeux de stratégie et un troisième à l'ajustement de Tchebycheff. Ces chapitres servent d'introduction à des matières qui ne sont pas toujours traitées dans un cours d'Algèbre linéaire.

On trouve dans ce livre un certain nombre d'exercices et de problèmes plus difficiles.

L'ouvrage est illustré de quelques figures exécutées avec soin et il est muni d'un index détaillé.

Ce livre clair et précis, d'un niveau assez élémentaire, sera apprécié par les étudiants auxquels ils s'adresse. S. Piccard

An Introduction to the Theory of Numbers. Von Ivan Niven und Herbert S. Zuckerman. 2. Auflage. 280 Seiten. 60s. John Wiley & Sons, London 1966.

In 11 Kapiteln (Teilbarkeit, Kongruenzen, quadratische Reziprozität, einige zahlentheoretische Funktionen, einige diophantische Gleichungen, Fareybrüche, einfache Kettenbrüche, elementare Bemerkungen über die Primzahlverteilung, algebraische Zahlen, Anzahl der Zerfällungen, Dichte von Zahlenfolgen) wird der Leser von den einfachsten Grundbegriffen zu schwierigeren Problemen der Zahlentheorie geführt. Der Weg ist so geschickt gebaut, dass die Steigungen kaum stark in Erscheinung treten, besonders wenn man sich die Zeit nimmt, die zahlreichen, zum Teil auch inhaltlich weiterführenden Übungsaufgaben (fast alle mit Lösungen) zu bearbeiten. Am Schluss wird man soviel an