

# Zur Zerlegung von Permutationen in elementfremde Zyklen

Autor(en): **Rätz, J.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **22 (1967)**

Heft 1

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-25351>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern. Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Dann kommutiert die Figur für alle Urbilder von  $n = 2$ , nämlich für  $(1, 1)$ ,  $(1, 2)$ ,  $(2, 1)$ . Für ein  $n > 2$  seien Injektionen  $\pi$  von  $\mu^{-1}\{1, 2, \dots, n-1\}$  in  $N$  und  $\varrho$  von  $\alpha^{-1}\{1, 2, \dots, n-1\}$  in  $N$  sowie eine Bijektion  $\varphi$  von  $\alpha^{-1}\pi\mu^{-1}\{1, \dots, n-1\}$  auf  $\mu^{-1}\varrho\alpha^{-1}\{1, \dots, n-1\}$  so definiert, dass das Diagramm kommutativ ist. Hat dann  $n$  die Primfaktorzerlegung  $n = \prod_{\nu} p_{\nu}^{q_{\nu}}$  mit paarweise verschiedenen Primzahlen  $p_{\nu}$ , so existieren genau  $m_n := \prod (q_{\nu} + 1)$  formal verschiedene Zerlegungen  $n = a_{\nu} b_{\nu}$  in natürliche Zahlen  $a_{\nu}, b_{\nu}$  ( $1 \leq \nu \leq m_n$ ). Wenn  $N - \varrho\alpha^{-1}\{1, \dots, n-1\} =: \{c_1, c_2, \dots\}$  mit  $c_1 < c_2 < \dots$  ist, dann definiere man  $\varrho(1, n-1) := c_1$ ,  $\varrho(2, n-2) := c_2, \dots$ ,  $\varrho(n-2, 2) := c_{n-2}$ .

Ferner setze man  $\pi(a_1, b_1) := d_1, \dots, \pi(a_{m_n-1}, b_{m_n-1}) := d_{m_n-1}$ , sofern  $N - \pi\mu^{-1}\{1, \dots, n-1\} =: \{d_1, d_2, \dots\}$  mit  $d_1 < d_2 < \dots$  gilt. Sodann wähle man  $\pi(a_{m_n}, b_{m_n})$  aus  $N - (\pi\mu^{-1}\{1, \dots, n-1\} \cup \{d_1, \dots, d_{m_n-1}\})$  so gross, dass

$$\pi(a_1, b_1) + \dots + \pi(a_{m_n}, b_{m_n}) - m_n \geq m_{\varrho(1, n-1)} + \dots + m_{\varrho(n-2, 2)} + 2$$

gilt. Da es beliebig grosse natürliche Zahlen  $l$  gibt, für die  $m_l$  einen vorgegebenen Wert  $\geq 2$  hat, kann man eine Zahl  $\varrho(n-1, 1)$  aus  $N - (\varrho\alpha^{-1}\{1, \dots, n-1\} \cup \{c_1, \dots, c_{n-2}\})$  mit der Eigenschaft

$$\pi(a_1, b_1) + \dots + \pi(a_{m_n}, b_{m_n}) - m_n = m_{\varrho(1, n-1)} + \dots + m_{\varrho(n-2, 2)} + m_{\varrho(n-1, 1)}$$

bestimmen. Dann haben die Mengen  $\alpha^{-1}\pi\mu^{-1}(n)$  und  $\mu^{-1}\varrho\alpha^{-1}(n)$  gleiche Elementenzahl, und  $\varphi$  lässt sich fortsetzen zu einer Bijektion von  $\alpha^{-1}\pi\mu^{-1}\{1, \dots, n\}$  auf  $\mu^{-1}\varrho\alpha^{-1}\{1, \dots, n\}$ . Auf diese Weise sind rekursiv Peano-Abbildungen  $\pi, \varrho$  und eine Bijektion  $\varphi$  von  $N \times N$  auf sich mit der Eigenschaft  $\mu\pi^{-1}\alpha = \alpha\varrho^{-1}\mu\varphi$  konstruiert. Nimmt man für  $\tau$  schliesslich eine beliebige Peano-Abbildung und setzt  $\sigma := \tau\varphi$ , dann gilt  $\mu\pi^{-1}\alpha\sigma^{-1} = \alpha\varrho^{-1}\mu\tau^{-1}$ , womit auch der zweite Teil des Satzes bewiesen ist.

J. SPILKER, Freiburg i. Br.

LITERATUR

- [1] H. GAO, *Solution to a Problem of S. Ulam*, Sci. Sinica 13, 1005–1006 (1964).
- [2] K. KOPFERMANN, *Lösung eines Problems über Peano-Abbildungen*, Math.-Phys. Semesterber. 10, 273–275 (1964).
- [3] S. ULAM, *A Collection of Mathematical Problems*, Interscience, New York 1960.

## Zur Zerlegung von Permutationen in elementfremde Zyklen

### 1. Definitionen und Bezeichnungen

Ausgehend von der Tatsache, dass jede Permutation  $\varphi$  abgesehen von der Reihenfolge auf genau eine Weise in elementfremde Zyklen zerfällt<sup>1)</sup>, ordnen wir  $\varphi$  ihre *Zykelzahl*  $z(\varphi)$  zu; hierbei sind die eingliedrigen Zyklen mitzuzählen. Eine Permutation  $\varphi$  von  $n$  Elementen mit  $z(\varphi) = k$  nennen wir fortan eine  $(n, k)$ -Permutation, und es bezeichne  $p(n, k)$  deren Anzahl. Die  $(n, 1)$ -Permutationen werden auch «zyklisch» genannt, und im Falle  $n \geq 2$  heissen die  $(n, n-1)$ -Permutationen *Transpositionen*.

Es sollen in dieser Note die Zahlen  $p(n, k)$  bestimmt und eine durch sie auf natürliche Weise induzierte Klassifikation der Permutationen betrachtet werden. Dabei beschränken wir uns auf die Behandlung des nichtentarteten Falles  $1 \leq k \leq n$ .

<sup>1)</sup> Vergleiche zum Beispiel [1], p. 10 oder [3], p. 28.

### 2. Rekursion

Unsere Anzahlfunktion  $p$  genügt der Anfangsbedingung

$$p(n, 1) = (n - 1)!; \quad p(n, n) = 1 \quad [n \geq 1] \tag{1}$$

und der Rekursionsbeziehung

$$p(n + 1, k + 1) = p(n, k) + n p(n, k + 1) \quad [n \geq 2; n - 1 \geq k \geq 1]. \tag{2}$$

In der Tat: (1) ist trivial, und (2) gewinnt man wie folgt: Sind  $a_1, \dots, a_{n+1}$  die zu permutierenden Elemente, so gibt es  $p(n, k)$   $(n + 1, k + 1)$ -Permutationen, welche den eingliedrigen Zyklus  $(a_{n+1})$  aufweisen. Um die Anzahl der übrigen  $(n + 1, k + 1)$ -Permutationen zu ermitteln, gehen wir aus von der Menge aller  $(n, k + 1)$ -Permutationen. Das neuhinzutretende Element  $a_{n+1}$  kann in jeder solchen Permutation an  $n$  Stellen eingefügt werden, nämlich als Nachfolger jedes schon vorhandenen Elementes; dabei soll  $a_{n+1}$  in den Zyklus seines Vorgängers aufgenommen werden. Bei zwei verschiedenen derartigen Einfügungsprozessen entstehen stets zwei verschiedene  $(n + 1, k + 1)$ -Permutationen; andererseits erhält man auf diese Weise alle  $(n + 1, k + 1)$ -Permutationen, welche den Zyklus  $(a_{n+1})$  nicht aufweisen. Damit ist (2) begründet. Durch eine heuristische Betrachtung der Funktionswerte  $p(n, 2)$  und  $p(n, 3)$  gelangt man unmittelbar zur Vermutung des folgenden Sachverhaltes:

**Satz 1.** *Bezeichnet  $c(n - 1, l)$  für  $1 \leq l \leq n - 1$  die  $l$ -te elementarsymmetrische Funktion der Zahlen  $1, \dots, n - 1$ , das heisst:*

$$c(n - 1, 1) = 1 + \dots + (n - 1), \tag{3_1}$$

$$c(n - 1, 2) = 1 \cdot 2 + \dots + (n - 2)(n - 1), \tag{3_2}$$

.....

$$c(n - 1, n - 1) = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n - 1) = (n - 1)! \tag{3_{n-1}}$$

mit der definatorischen Ergänzung

$$c(n - 1, 0) = 1 \quad [n \geq 1], \tag{4}$$

so gilt

$$p(n, k) = c(n - 1, n - k) \quad [1 \leq k \leq n]. \tag{5}$$

*Beweis* (doppelte Induktion): Definiert man die Hilfsmengen  $A_j = \{(j + k, k) \mid k \text{ nat. Zahl}\}$  für  $j \geq 0$  ganz;  $A = \bigcup_{j=0}^{\infty} A_j$ ;  $S = \{(n, k) \in A \mid p(n, k) = c(n - 1, n - k)\}$ , so gilt es zu zeigen:  $A = S$ . – Nach (1) und (4) gilt  $p(n, n) = 1 = c(n - 1, 0)$  für alle  $n \geq 1$ ; somit ist (a)  $A_0 \subset S$ . – Es sei nun (b)  $A_j \subset S$  für ein gewisses  $j \geq 0$ . Nach (1) und (3\_{n-1}) ist  $p(j + 2, 1) = (j + 1)! = c(j + 1, j + 1)$ , also (c)  $(j + 2, 1) \in S$ . Für eine gewisse natürliche Zahl  $k$  sei (d)  $(j + 1 + k, k) \in S$ . Nach (2), der Erklärung von  $S$  und (b) ergibt sich

$$\begin{aligned} p(j + 1 + k + 1, k + 1) &= p(j + 1 + k, k) + (j + 1 + k) \cdot p(j + 1 + k, k + 1) \\ &= c(j + k, j + 1) + (j + k + 1) \cdot c(j + k, j) = c(j + k + 1, j + 1), \end{aligned}$$

das heisst (e)  $(j + 1 + k + 1, k + 1) \in S$ . Aus (c) und [(d)  $\Rightarrow$  (e)] folgt (f)  $A_{j+1} \subset S$ , und aus (a) und [(b)  $\Rightarrow$  (f)] folgt  $A_j \subset S$  für alle  $j \geq 0$  ganz. Somit ist  $A \subset S$  und nach der Definition von  $S$  sodann  $A = S$ , q.e.d.

Auf Grund von (5) besteht der folgende Zusammenhang der  $p(n, k)$  mit den STIRLINGSchen Zahlen  $s(n, k)$  erster Art<sup>2)</sup>:

$$p(n, k) = |s(n, k)| \quad [1 \leq k \leq n]. \tag{6}$$

**3. Wertetabelle für  $p(n, k)$**

	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$	$k = 6$	$k = 7$	$k = 8$	...
$n = 1$	1								
$n = 2$	1	1							
$n = 3$	2	3	1						
$n = 4$	6	11	6	1					
$n = 5$	24	50	35	10	1				
$n = 6$	120	274	225	85	15	1			
$n = 7$	720	1764	1624	735	175	21	1		
$n = 8$	5040	13068	13132	6769	1960	322	28	1	
.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....	.....

**4. Eine Klassifikation der Permutationen**

Setzt man in der bekannten Identität

$$x(x+1) \cdots (x+n-1) = \sum_{k=1}^n c(n-1, n-k) x^k = \sum_{k=1}^n p(n, k) x^k \quad [n \geq 1] \tag{7}$$

$x = 1$  bzw.  $x = -1$ , so ergibt sich

$$n! = \sum_{k=1}^n p(n, k) \quad [n \geq 1] \tag{8}$$

bzw.

$$0 = \sum_{k=1}^n (-1)^k p(n, k) \quad [n \geq 2]. \tag{9}$$

(8) ist in trivialer Weise deutbar, und (9) führt zu einer Aufteilung aller Permutationen von  $n$  Elementen  $[n \geq 2]$  in zwei gleichmächtige Klassen, wenn die in (9) mit positiven Posten gezählten Permutationen zu der einen, die übrigen zur anderen Klasse gehören sollen. Dass diese Klassifikation mit der wohl wichtigsten Klassifikation der Permutationen übereinstimmt, sagt

**Satz 2.** Eine  $(n, k)$ -Permutation  $[n \geq 2]$  ist genau dann gerade, wenn gilt:

$$k \equiv n \pmod{2}.$$

*Beweis.* Es genügt zu zeigen, dass für eine beliebige Permutation  $\varphi$  und eine beliebige Transposition  $\tau$  die Beziehung

$$z(\tau \varphi) \equiv z(\varphi) \pmod{2} \tag{10}$$

besteht. Ist nämlich  $(a_i, a_j)$  der einzige zweigliedrige Zyklus von  $\tau$ , so ist die Wirkung von  $\tau$  auf  $\varphi$  bei der Bildung von  $\tau \varphi$  die folgende: a) Die zu  $(a_i, a_j)$  disjunkten Zyklen von  $\varphi$  treten in  $\tau \varphi$  unverändert auf. b) Gehören  $a_i, a_j$  in  $\varphi$  zum gleichen Zyklus, so wird dieser beim Übergang von  $\varphi$  zu  $\tau \varphi$  in zwei Zyklen zerlegt. c) Gehören  $a_i, a_j$  zu verschiedenen Zyklen von  $\varphi$ , so werden diese beim Übergang von  $\varphi$  zu  $\tau \varphi$  zu einem einzigen Zyklus vereinigt. Damit ist (10) sichergestellt. JÜRGEN RÄTZ, Bern

<sup>2)</sup> Eine ausführliche Darstellung der Theorie dieser Zahlen findet sich etwa in [2], p. 142ff.

*Nachtrag:* Nach der Durchsicht der Fahne stellt Verf. fest, dass das Ergebnis von Satz 1 in anderer Weise durch J. RIORDAN, *An Introduction to combinatorial analysis* (Wiley, New York 1958) S. 71 erzielt wurde.

## LITERATURVERZEICHNIS

- [1] L. BAUMGARTNER, *Gruppentheorie*, de Gruyter, Berlin 1958 (3. Aufl.).  
 [2] CH. JORDAN, *Calculus of Finite Differences*, Chelsea, New York 1947 (2nd edition).  
 [3] B. L. VAN DER WAERDEN, *Algebra I*, Springer, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1955 (4. Aufl.).

## Kleine Mitteilungen

## Zu einer Frage von E. Szekeres

Herrn Prof. Dr. W. SAXER zum 70. Geburtstag gewidmet

## 1. Einleitung und Antwort

In ihrem Beitrag «Eine Bemerkung zum Artikel: Wissenswertes um das Dreieck», *El. Math.* 21, 35–37 (1966), stellt ESTHER SZEKERES mit Recht fest, dass die Frage, welche Faktoren im allgemeinen Dreieck die Größenbeziehung von  $\Sigma F$  und  $\Sigma I$  bestimmen würden, noch offen sei. In der vorliegenden Note versuche ich, die Angelegenheit zu klären, wobei wie bei E. SZEKERES  $O, I, F, H$  in dieser Reihenfolge Um- und Inkreismitelpunkt, Mittelpunkt des Feuerbachkreises und Höhenschnittpunkt des Dreiecks sei. Doch bedeute  $\Sigma P$  die Summe der in üblicher Weise orientierten Abstände des Punktes  $P$  von den Dreiecksseiten. Damit gelten die folgenden Resultate nicht nur für das spitzwinklige Dreieck.  $R$  und  $r$  bezeichnen Um- und Inkreisradius des Dreiecks.

Eine Normale zu  $OI$  ist nach PRIMROSE Ort der Punkte mit gleicher Seitenabstandsumme (Beweise in [1] und [2]). Es sei  $O \cong I$ . Die Dreiecksebene wird von der durch  $I$  laufenden Geraden  $g \perp OI$  in zwei Halbebenen zerlegt, und wir brauchen einzig abzuklären, ob  $F$  und  $O$  in ein und derselben Halbebene liegen. Ist dies der Fall, so gilt  $\Sigma F > \Sigma I$ , da  $\Sigma O = R + r > 3r = \Sigma I$ . Ebenso ergibt sich  $\Sigma F \leq \Sigma I$ , je nachdem  $F$  in der  $O$  nicht enthaltenden Halbebene oder auf  $g$  liegt. Das bedeutet vorerst:

$$\nless OIF \cong 90^\circ \text{ ist charakteristisch für } \Sigma F \cong \Sigma I$$

oder

$$OI^2 + IF^2 \cong OF^2 \iff \Sigma F \cong \Sigma I.$$

Aus  $OI = (R^2 - 2Rr)^{1/2}$ ,  $IF = (R - 2r)/2$  und  $OF = OH/2$  folgt damit

$$(R - 2r)(5R - 2r) \cong OH^2 \iff \Sigma F \cong \Sigma I, \quad (1)$$

wobei  $O \equiv I$  ersichtlich miteinbezogen werden kann.

Ist  $\varrho$  der (mit Vorzeichen versehene) Inkreisradius des Höhenfusspunktdreiecks, so lässt sich die Äquivalenzrelation wegen  $OH^2 = R^2 - 4R\varrho$  auf eine Form bringen, die auf der linken Seite nur noch Radien enthält:

$$R^2 - 3Rr + r^2 + R\varrho \cong 0 \iff \Sigma F \cong \Sigma I. \quad (2)$$

Soll die linke Seite neben  $R$  und  $r$  etwa den halben Dreiecksumfang  $s$  enthalten, so gewinnen wir aus (1) und der Identität  $OH^2 = 9R^2 + 8Rr + 2r^2 - 2s^2$ , deren Nachweis sich der Leser zurechtlegen mag, das merkwürdige Resultat

$$\frac{s^2}{Rr} + \frac{r}{R} - \frac{2R}{r} \cong 10 \iff \Sigma F \cong \Sigma I. \quad (3)$$

## 2. Zwei Spezialfälle

a) Das Bezugsdreieck ist rechtwinklig

Es gilt  $\varrho = 0$  und (2) schreibt sich

$$R^2 - 3Rr + r^2 \cong 0 \iff \Sigma F \cong \Sigma I,$$