Kleine Mitteilungen

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **22 (1967)**

Heft 1

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Nachtrag: Nach der Durchsicht der Fahne stellt Verf. fest, dass das Ergebnis von Satz 1 in anderer Weise durch J. Riordan, *An Introduction to combinatorial analysis* (Wiley, New York 1958) S. 71 erzielt wurde.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] L. Baumgartner, *Gruppentheorie*, de Gruyter, Berlin 1958 (3. Aufl.).
[2] Ch. Jordan, *Calculus of Finite Differences*, Chelsea, New York 1947 (2nd edition).
[3] B. L. van der Waerden, *Algebra I*, Springer, Berlin–Göttingen–Heidelberg 1955 (4. Aufl.).

Kleine Mitteilungen

Zu einer Frage von E. Szekeres

Herrn Prof. Dr. W. Saxer zum 70. Geburtstag gewidmet

1. Einleitung und Antwort

In ihrem Beitrag «Eine Bemerkung zum Artikel: Wissenswertes um das Dreieck», El. Math. *21*, 35–37 (1966), stellt Esther Szekeres mit Recht fest, dass die Frage, welche Faktoren im allgemeinen Dreieck die Grössenbeziehung von ΣF und ΣI bestimmen würden, noch offen sei. In der vorliegenden Note versuche ich, die Angelegenheit zu klären, wobei wie bei E. Szekeres O, I, F, H in dieser Reihenfolge Um- und Inkreismittelpunkt, Mittelpunkt des Feuerbachkreises und Höhenschnittpunkt des Dreiecks sei. Doch bedeute ΣP die Summe der in üblicher Weise *orientierten* Abstände des Punktes P von den Dreiecksseiten. Damit gelten die folgenden Resultate nicht nur für das spitzwinklige Dreieck. R und r bezeichnen Um- und Inkreisradius des Dreiecks.

Eine Normale zu OI ist nach Primrose Ort der Punkte mit gleicher Seitenabstandssumme (Beweise in [1] und [2]). Es sei $O \not\equiv I$. Die Dreiecksebene wird von der durch I laufenden Geraden $g \perp OI$ in zwei Halbebenen zerlegt, und wir brauchen einzig abzuklären, ob F und O in ein und derselben Halbebene liegen. Ist dies der Fall, so gilt $\Sigma F > \Sigma I$, da $\Sigma O = R + r > 3r = \Sigma I$. Ebenso ergibt sich $\Sigma F \leqq \Sigma I$, je nachdem F in der O nicht enthaltenden Halbebene oder auf g liegt. Das bedeutet vorerst:

$$\sphericalangle\, OIF \lesseqgtr 90^\circ \text{ ist charakteristisch für } \Sigma F \gtreqless \Sigma I$$

oder

$$OI^2 + IF^2 \lesseqgtr OF^2 \iff \Sigma F \gtreqless \Sigma I\,.$$

Aus $OI = (R^2 - 2Rr)^{1/2}$, $IF = (R - 2r)/2$ und $OF = OH/2$ folgt damit

$$(R - 2r)\,(5R - 2r) \lesseqgtr OH^2 \iff \Sigma F \gtreqless \Sigma I\,, \tag{1}$$

wobei $O \equiv I$ ersichtlich miteinbezogen werden kann.

Ist ϱ der (mit Vorzeichen versehene) Inkreisradius des Höhenfusspunktdreiecks, so lässt sich die Äquivalenzrelation wegen $OH^2 = R^2 - 4R\varrho$ auf eine Form bringen, die auf der linken Seite nur noch Radien enthält:

$$R^2 - 3Rr + r^2 + R\varrho \lesseqgtr 0 \iff \Sigma F \gtreqless \Sigma I\,. \tag{2}$$

Soll die linke Seite neben R und r etwa den halben Dreiecksumfang s enthalten, so gewinnen wir aus (1) und der Identität $OH^2 = 9R^2 + 8Rr + 2r^2 - 2s^2$, deren Nachweis sich der Leser zurechtlegen mag, das merkwürdige Resultat

$$\frac{s^2}{Rr} + \frac{r}{R} - \frac{2R}{r} \lesseqgtr 10 \iff \Sigma F \lesseqgtr \Sigma I\,. \tag{3}$$

2. Zwei Spezialfälle

a) Das Bezugsdreieck ist rechtwinklig

Es gilt $\varrho = 0$ und (2) schreibt sich

$$R^2 - 3Rr + r^2 \lesseqgtr 0 \iff \Sigma F \gtreqless \Sigma I\,,$$

Daraus gewinnen wir

$$r \gtreqless \frac{R}{2}(3-\sqrt{5}) \iff \Sigma F \lesseqgtr \Sigma I \tag{4}$$

oder für den Fall der Gleichheit den

Satz: Im rechtwinkligen Dreieck hat der Mittelpunkt des Neunpunktekreises genau dann die gleiche Seitenabstandssumme wie der Inkreismittelpunkt, wenn der Inkreisradius gleich dem kleineren Abschnitt des stetig geteilten Umkreisradius ist.

Ein solches Dreieck kann also ohne weiteres konstruiert werden. Seine Fläche misst

$$R^2 (13 - 5\sqrt{5})/2 \approx 0{,}91\, R^2 .$$

b) Dreiecke, bei welchen F auf der Inkreisperipherie liegt

Unter dieser Voraussetzung erhalten wir auf unsere Frage eine bemerkenswert einfache Antwort. Für solche Dreiecke gilt einmal $r = R/4$, was aus $IF = (R - 2r)/2 = r$ folgt; (1) entnehmen wir sodann

$$\frac{3R}{2} \lesseqgtr OH \iff \Sigma F \lesseqgtr \Sigma I . \tag{5}$$

Nun ist $K(O, 3R/2)$ der Pferchkreis für die Punkte F *aller* dem Kreis $k(O, R)$ eingeschriebenen Dreiecke, so dass (5) folgendes aussagt: Liegt F auf der Inkreisperipherie, so gilt $\Sigma F \lesseqgtr \Sigma I$, je nachdem H äusserer, innerer oder Peripheriepunkt des *Pferchkreises* K von F ist.

F. LEUENBERGER, Feldmeilen

LITERATURVERZEICHNIS

[1] E. J. F. PRIMROSE, *A Triangle Property*, Math. Gaz. *45*, note 2967, 231–232 (1961).

[2] J. STEINIG, *A Comparison of two Inequalities for the Triangle*, Acta Math. Scient. Hung. *16*, 19–22 (1965).

Einfache Beweise zweier Dreieckssätze

Die folgenden zwei Sätze betreffen Inhalt und Umfang eines einem gegebenen Dreieck einbeschriebenen Dreiecks. Das gegebene Dreieck, ABC, sei durch drei auf den Seiten liegende Punkte X, Y, Z in vier kleinere Dreiecke geteilt. Dann ist der Inhalt bzw. der Umfang des Dreiecks XYZ nicht kleiner als der kleinste Inhalt bzw. der kleinste Umfang der drei angrenzenden Dreiecke.

Beide Sätze wurden von P. ERDÖS und E. TROST entdeckt. Ein Beweis des Inhaltssatzes von A. BAGER erschien zuerst in El. Math. *12*, 43 (1957) (Lösung der Aufgabe 260, (H. DEBRUNNER)). Der Satz wurde 1960 als Problem 4908 in Amer. Math. Monthly gestellt (RAINWATER) und 1961 ebendort S. 386 bewiesen. Der Umfangssatz erschien als Problem 4964 in Amer. Math. Monthly, 1961 (E. TROST und A. BAGER) und wurde 1962 ebendort S. 672 bewiesen. Eine weitere Lösung gab 1965 H. T. CROFT in Mathematical Gazette, Vol. 49, Nr. 367, S. 45.

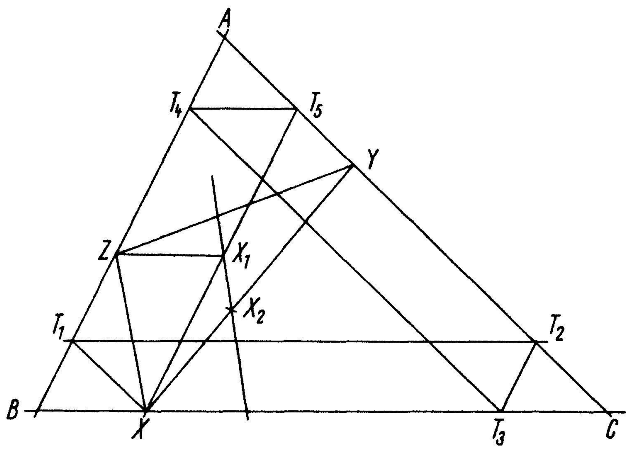
Diese Beweise sind entweder trigonometrisch oder sie beruhen auf einer stufenweisen Veränderung der Figur, wobei X, Y, Z, in die Mittelpunkte der betreffenden Seiten geschoben werden. Die folgenden einfachen Beweise beider Sätze liefern in jedem Falle ein angrenzendes Dreieck mit der gewünschten Minimaleigenschaft. «Kleiner» ist dabei im Sinne «kleiner oder gleich» benutzt.

a) Es seien X, Y, Z, beliebige Punkte auf den Seiten BC, AC, AB, des Dreiecks ABC. Wir betrachten die sechs Streckenverhältnisse $BX : BC$, $XC : BC$, $CY : AC$, usw. Wir können annehmen, dass alle sechs Verhältnisse grösser oder gleich $BX : BC$ sind.

In Figur 1 ist $XT_1 \parallel AC$, $T_1T_2 \parallel BC$, $T_2T_3 \parallel AB$, $T_3T_4 \parallel AC$, $T_4T_5 \parallel BC$, $T_5X \parallel AB$. Offenbar liegen dann Y und Z auf den Strecken T_2T_5 und T_1T_4. Es sei X_1 so bestimmt, dass $ZBXX_1$ ein Parallelogramm ist und X_2 ist ein Punkt auf XY, so dass $X_1X_2 \parallel ZX$ ist. Dann gilt:

$$\text{Inhalt } XBZ = \text{Inhalt } ZX_1X = \text{Inhalt } ZX_2X \leq \text{Inhalt } ZYX .$$

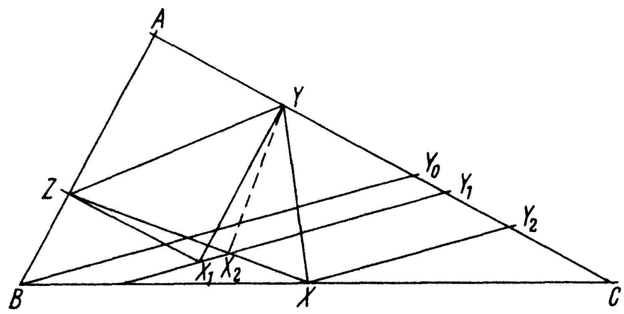
Damit ist das Inhaltsproblem bewiesen.



Figur 1

b) Das gegebene und das einbeschriebene Dreieck sollen wieder mit ABC, bzw. XYZ bezeichnet werden. Wir wollen feststellen, unter welchen Umständen der Umfang des Dreiecks AZY kleiner als der Umfang des Dreiecks XZY ist. In Figur 2 sei die Seite AB kleiner als die Seite AC, ferner $AY_0 = AB$, AZX_1Y ein Parallelogramm, $X_1Y_1 \parallel BY_0$, $XY_2 \parallel BY_0$ und X_2 der Schnittpunkt von ZX und X_1Y_1. Da die Geraden ZX_1 und X_1Y gleiche Winkeln mit der Geraden X_1Y_1 einschliessen, ist nach einem wohlbekannten Satze der Weg ZX_1Y kürzer als der Weg ZX_2Y, und wir haben in Figur 2:

$$\text{Umfang } AZY = \text{Umfang } ZX_1Y \leqq \text{Umfang } ZX_2Y \leqq \text{Umfang } ZXY\,.$$



Figur 2

Die letztgenannte Ungleichung gilt, falls $CY_2 \leqq CY_1$ ist. (CY_2, CY_1, usw. sollen immer die Längen der betreffenden Strecken bezeichnen.) Wir berechnen diese Längen:

$$CY_2 = (AC - AB)\, CX/CB \tag{1}$$

$$CY_1 = AC - AY - YY_1 = AC - AY - YX_1 = AC - AY - AZ\,. \tag{2}$$

Die Bedingung $CY_2 \leqq CY_1$ wird erfüllt, wenn

$$XC\,(AC - AB) + BC\,(AY + AZ) \leqq AC \cdot BC\,. \tag{3}$$

Ähnliche hinreichende Bedingungen können wir für die Dreiecke CXY und BZX erhalten. Nehmen wir an, dass $AB \leqq AC \leqq BC$ ist, dann sind

$$BZ\,(BC - AC) + AB\,(CX + CY) \leqq BC \cdot AB\,, \tag{4}$$

$$CY\,(BC - AB) + AC\,(BX + BZ) \leqq BC \cdot AC \tag{5}$$

die betreffenden Ungleichungen.

Wir wollen zeigen, dass wenigstens eine der drei Ungleichungen immer erfüllt ist. Nehmen wir an, dass (3) und (5) beide nicht gelten. Durch Addition erhalten wir dann
$$XC\,(AC - AB) + BC\,(AY + AZ) + CY\,(BC - AB) + AC\,(BX + BZ) \geqq 2\,AC \cdot BC$$
oder

$$AC\,(BX + XC) + BC\,(AY + YC) - AB\,(XC + CY) + BC \cdot AZ + AC \cdot BZ \geqq 2\,AC \cdot BC \tag{6}$$

Setzen wir nun $AZ = AB - BZ$, dann wird (6) identisch mit (4). Damit ist der Satz bewiesen.

ESTHER SZEKERES, University of Sydney