Eine Kennzeichnung des Kreises

ELEMENTE DER MATHEMATIK
Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare
Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts
Publiziert mit Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds
zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung

El. Math. Band XXII Heft 2 Seiten 25–48 10. März 1967

Eine Kennzeichnung des Kreises

In gewissen Untersuchungen [1, 2, 3] spielt der Begriff der Kreuzung von konvexen Gebieten eine Rolle. Folgende Definition bezieht sich auf allgemeinere Punktmengen. Wir sagen, dass zwei zusammenhängende Punktmengen a und b einander *kreuzen*, wenn keine der Punktmengen $a - ab$, $b - ab$, die aus a oder b durch Heraushebung ihres Durchschnittes ab entstehen, zusammenhängend ist. Dabei sei eine Punktmenge *zusammenhängend* genannt, wenn sich je zwei ihrer Punkte durch einen zu der Menge gehörigen Jordanschen Bogen verbinden lassen.

Es gilt folgender Satz:

In der Euklidischen Ebene sei eine zusammenhängende, abgeschlossene Punktmenge s vorgegeben. Besitzt die Menge s die Eigenschaft, dass sie keines der zu ihr kongruenten Exemplare kreuzt, so ist s entweder ein Punkt, oder eine abgeschlossene Kreisscheibe, oder eine abgeschlossene Halbebene, oder das Komplement einer offenen Kreisscheibe, oder die ganze Ebene.

Statt der Euklidischen Ebene wollen wir unseren Betrachtungen die Sphäre zugrunde legen, wo sich der entsprechende Satz und sein Beweis kürzer formulieren lassen:

Besitzt auf der Sphäre eine zusammenhängende, abgeschlossene Punktmenge s die Eigenschaft, dass sie keine zu ihr kongruente Punktmenge kreuzt, so ist s ein Kreis.

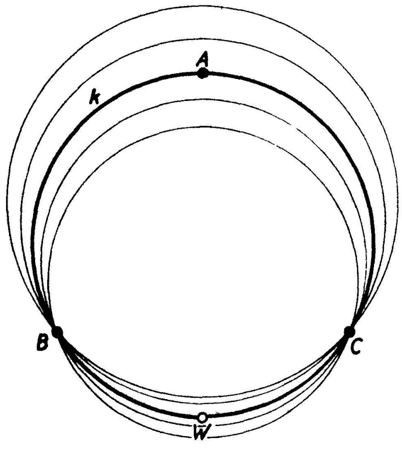
Hier wird unter einem *Kreis* die Menge aller Punkte verstanden, deren Abstand von einem festen Punkt eine vorgegebene Grösse nicht übertrifft. Diese Definition umfasst neben den Kreisscheiben (Kugelkappen) auch die leere Menge, einen Punkt und die ganze Sphäre.

Die Tatsache, dass zwei Kreise einander nie kreuzen, leuchtet ein. Deshalb setzen wir voraus, dass s kein Kreis ist. Wir zeigen, dass sich die Punktmenge s durch eine Drehung mit ihrer ursprünglichen Lage in Kreuzung bringen lässt.

Wir nennen die Punkte von s schwarz und die übrigen Punkte der Sphäre weiss. Wir behaupten: Es gibt eine Kreislinie, die je ein einander trennendes schwarzes und weisses Punktepaar enthält.

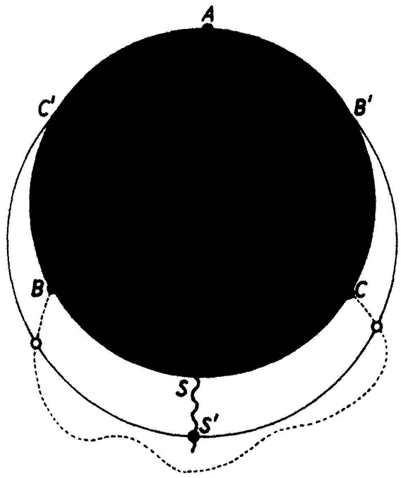
Um dies einzusehen, können wir voraussetzen, dass auch die Menge der weissen Punkte zusammenhängend ist. Sonst hätte nämlich eine Kreislinie, die zwei nicht zusammenhängende weisse Komponenten verbindet, die behauptete Eigenschaft.

Wir betrachten drei Randpunkte A, B, C von s. Da s abgeschlossen ist, sind A, B und C schwarz. Es sei k die durch A, B und C hindurchgehende Kreislinie. Die Punkte A, B, C zerlegen k in drei Bögen. Wir setzen zunächst voraus, dass k, etwa auf dem Bogen BC, einen weissen Punkt W enthält (Figur 1). Dann ist natürlich auch eine ganze Umgebung von W weiss. Da ferner A ein Grenzpunkt von s ist, gibt es in jeder Umgebung von A weisse Punkte. Deshalb gibt es unter den durch B und C hindurchgehenden Kreislinien eine, die auf beiden Bögen BC und CB je einen weissen Punkt enthält.



Figur 1

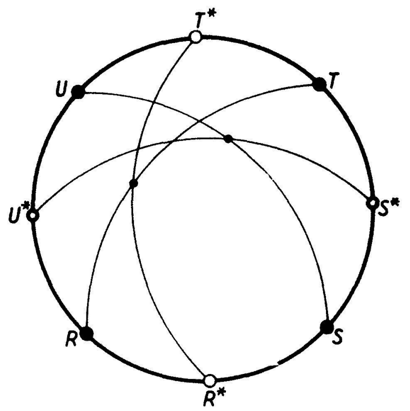
Wir haben noch den Fall zu betrachten, dass die ganze Kreislinie k schwarz ist. Da nach Voraussetzung die Menge der weissen Punkte zusammenhängend ist, ist eine Seite von k ganz schwarz. Wäre die andere Seite vollständig weiss, so wäre s ein durch k begrenzter Kreis, was unserer Voraussetzung widerspricht. Deshalb enthält k, etwa auf dem Bogen BC, einen Punkt S, der in jeder Umgebung einen nicht zur schwarzen Seite von k gehörigen schwarzen Punkt S' enthält (Figur 2). Da B und C Randpunkte sind, sind sie durch einen weissen Kurvenbogen verbunden. Wir wählen den Punkt S' so, dass er zwischen diesen Bogen und den Bogen BC von k fällt. Ferner wählen wir auf den Bögen AB und CA von k je einen Punkt C' und B', und betrachten die Kreislinie $k' = C'S'B'$. Offensichtlich enthalten beide Bögen $C'S'$ und $S'B'$ von k' je einen weissen Punkt. Damit ist unsere Behauptung bewiesen.



Figur 2

Es seien nun RS und TU die grössten weissen Bögen, die auf unserem Kreis die betrachteten weissen Punkte enthalten. Die Punkte R, S, T, U sind schwarz. (Dabei können S und T oder U und R zusammenfallen.) Wir betrachten eine Drehung, die R in einen Punkt R^* des Bogens RS und T in einen Punkt T^* des Bogens TU überführt. Wir behaupten, dass s und die gedrehte Punktmenge s^* einander kreuzen.

Die Punkte R^* und T^* von s^* liegen ausserhalb s. Es sei R^*T^* ein beliebiger zu s^* gehöriger Kurvenbogen (Figur 3). Diesem Bogen entspricht in der Drehung $s^* \to s$ ein Kurvenbogen RT in s. Da aber die Kurvenbögen R^*T^* und RT einander kreuzen,



Figur 3

ist $s^* - s^*s$ nicht zusammenhängend. In ähnlicher Weise sieht man ein, dass sich die ausserhalb s^* liegenden Punkte S und U innerhalb s nur durch einen über s^* führenden Kurvenbogen verbinden lassen. Deshalb ist $s - ss^*$ auch nicht zusammenhängend.

Damit ist der Beweis beendet. L. FEJES TÓTH, Budapest

Bemerkungen der Redaktion: Bezüglich der Frage, was beim Weglassen der Bedingung der Abgeschlossenheit passiert, siehe P. ERDÖS und E. GR. STRAUS: Über eine geometrische Frage von FEJES TÓTH (erscheint in dieser Zeitschrift)

LITERATURVERZEICHNIS

[1] R. P. BAMBAH und C. A. ROGERS, *Covering the Plane by Convex Sets*, J. London Math. Soc. *27*, 304–314 (1952).
[2] L. FEJES TÓTH, *Isoperimetric Problems Concerning Tessellations*, Acta Math. Acad. Sci. Hung. *14*, 343–351 (1963).
[3] L. FEJES TÓTH, *Reguläre Figuren* (Budapest 1965), S. 161.

Eine geometrische Charakterisierung der Differenzierbarkeit für Funktionen zweier Veränderlicher

M. FRÉCHET hat vor einiger Zeit in einer ausführlichen, didaktisch orientierten Arbeit[1]) verschiedene Definitionen der Differenzierbarkeit bzw. des Differentials von Funktionen zweier Veränderlicher dargestellt und ihre Äquivalenz untereinander ge-

---

[1]) Siehe Literaturverzeichnis [3], S. 34.