Elementare Bestimmung der gefährlichen Fläche beim räumlichen Rückwärtsschnitt

Autor(en): **Stachel, H.**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **22 (1967)**

Heft 2

PDF erstellt am: **14.09.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-25354

Aus (1), (8), (10) folgt

$$m_{n+1}\, r \leqslant l_n(r) \text{ für } r \geqslant a_{n+1},$$

und aus (5), (7) folgt

$$f(x, y) \leqslant m_{n+1}\sqrt{x^2+y^2}, \text{ wenn } \sqrt{x^2+y^2} < a_n;$$

somit gilt

$$f(x, y) \leqslant l_n\left(\sqrt{x^2+y^2}\right), \text{ wenn } a_{n+1} \leqslant \sqrt{x^2+y^2} < a_n. \tag{12}$$

IV. Nun setzen wir

$$k_2(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } x = y = 0; \\ l_n\left(\sqrt{x^2+y^2}\right), & \text{wenn } a_{n+1} \leqslant \sqrt{x^2+y^2} < a_n \quad (n = 1, 2, \ldots). \end{cases}$$

Wegen (7), (8), (9) ist hierdurch eine Funktion k_2 mit dem Definitionsbereich

$$K_2 = \{(x, y) \mid \sqrt{x^2+y^2} < a_1 = r_2\}$$

gegeben, und K_2 ist (nach unserer Annahme über D) in D enthalten. Offenbar ist $k_2(x, y) > 0$ für $(x, y) \neq (0, 0)$, und auf Grund von (12) gilt

$$f(x, y) \leqslant k_2(x, y) \text{ für alle } (x, y) \in K_2.$$

Weiter ergibt sich mit (10) sofort die Stetigkeit von k_2 und hieraus mit (11) die Konvexität von unten. Schliesslich überzeugt man sich mit Hilfe von (2) und (8) leicht davon, dass k_2 glatt ist, das heisst dass es keine von der xy-Ebene verschiedene Stützebene an k_2 in (0, 0, 0) gibt. Damit ist Satz 2 bewiesen.

ARNOLD KIRSCH, Göttingen

LITERATURVERZEICHNIS

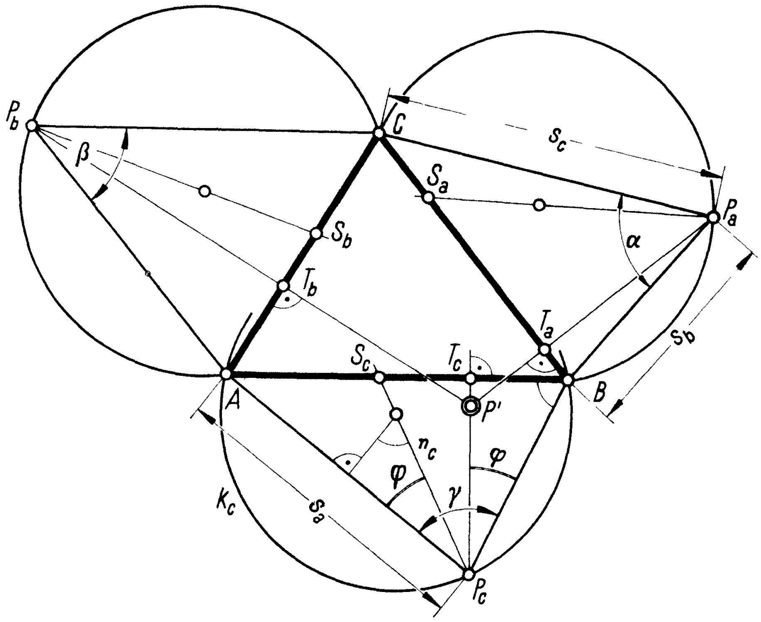
[1] W. BLASCHKE, *Kreis und Kugel*, 2. Aufl., Berlin 1956.
[2] T. BONNESEN und W. FENCHEL, *Theorie der konvexen Körper*, Berlin 1934.
[3] M. FRÉCHET, *Sur diverses définitions de la différentiabilité*, L'Ens. math. X, 177–228 (1964).
[4] A. KIRSCH, *Eine geometrische Charakterisierung der «Differenzierbarkeit» einer Funktion*, Math.-Phys. Semesterberichte VII, 96–100 (1960).

Elementare Bestimmung der gefährlichen Fläche beim räumlichen Rückwärtsschnitt

Als *räumlichen Rückwärtsschnitt* bezeichnet man die Aufgabe, zu einem vorgegebenen Dreieck $\triangle$ mit den Ecken A, B, C jenen Raumpunkt P zu bestimmen, aus welchem die Dreiecksseiten unter vorgegebenen Winkeln α, β, γ erscheinen. Der Ort aller Punkte, aus welchen zwei feste Punkte A, B unter konstantem Winkel γ gesehen werden, besteht in der Ebene nach dem Peripheriewinkelsatz aus zwei Kreisen über der Sehne AB. Rotation dieser Kreise um $[AB]$ ergibt einen Torus als entsprechende

Ortsfläche im Raum. Das Problem des räumlichen Rückwärtsschnittes führt somit auf die Bestimmung der gemeinsamen Punkte P dreier Torusflächen.

Es kann dabei der Fall eintreten, dass in einem Lösungspunkt P die Tangentialebenen an die drei Torusflächen eine Gerade g gemein haben. Dann berühren die Schnittkurven je zweier Torusflächen die Gerade g in P; also ist P auf g differentiell verschiebbar. Den Ort solcher verschiebbaren Punkte bezeichnet man als *gefährliche Fläche* dieses Problems.



Figur 1

Als erster hat S. FINSTERWALDER[1]) mit Hilfe kinematischer Überlegungen und unter Verwendung unendlich kleiner Grössen erster und zweiter Ordnung gezeigt, dass der gefährliche Ort ein Drehzylinder ist, der den Umkreis von $\triangle$ als Normalschnitt enthält. Ein exakter kinematischer Beweis, in welchem jedoch die Kenntnis von Nullsystemen vorausgesetzt wird, stammt von W. WUNDERLICH[2]). In der nun folgenden Bestimmung werden nur elementare Mittel verwendet:

Angenommen, P sei ein Lösungspunkt des räumlichen Rückwärtsschnittes. Sein Normalriss auf die als Zeichenebene verwendete Dreiecksebene ε sei P'. Durch Drehung von P um die Dreiecksseiten $[AB]$, $[BC]$, $[CA]$ nach ε erhält man die Punkte P_c, P_a, P_b. Dabei treten in ε als Abstände $P_aB = P_cB, \ldots$ die Längen $s_b, \ldots$ der Kanten $PB, \ldots$ auf (siehe Figur 1).

Lässt man den Umkreis k_c von A, B, P_c um die Seite $[AB]$ rotieren, so erhält man eine der drei oben genannten Torusflächen durch den Punkt P. Die Flächennormale an diesen Torus in P ist zugleich die Kreisnormale zum Umkreis von A, B, P. Deren Schnittpunkt S_c mit der Geraden $[AB]$, zugleich der Spurpunkt in ε, bleibt bei der Drehung der Ebene $[ABP]$ nach ε fest, liegt also auf der Normalen n_c an den Umkreis k_c in P_c. Ebenso findet man die zwei weiteren Spurpunkte S_a, S_b.

---

[1]) Die geometrischen Grundlagen der Photogrammetrie, Jahresber. d. Deutschen Mathem.-Vereinigung VI, 2 (1899).

[2]) Über den «gefährlichen» Rückwärtseinschnitt, Jahresber. d. Deutschen Mathem.-Vereinigung LIII, 2 (1943). In dieser Abhandlung werden auch ausführlich die Richtungen der differentiellen Verschiebungen in Punkten der gefährlichen Fläche behandelt.

Soll nun P auf der gefährlichen Fläche liegen, so gehen die drei Torustangentialebenen in P durch eine Gerade. Die drei Flächennormalen liegen daher in einer Ebene und ihre Spurpunkte S_a, S_b, S_c liegen auf einer Geraden in ε und umgekehrt.

Nach dem *Satz von Menelaos* sind die auf dem Dreieck ABC gelegenen Punkte S_a, S_b, S_c dann und nur dann kollinear, wenn die Teilverhältnisse[3]) die Gleichung $(ABS_c)\,(BCS_a)\,(CAS_b) = 1$ erfüllen.

In den Dreiecken AP_cS_c und S_cP_cB in Figur 1 gilt nach dem Sinussatz:

$$A\,S_c\colon \sin\sphericalangle\, A\,P_c\,S_c = A\,P_c\colon \sin\sphericalangle\, A\,S_c\,P_c$$

$$B\,S_c\colon \sin\sphericalangle\, B\,P_c\,S_c = B\,P_c\colon \sin\sphericalangle\, B\,S_c\,P_c$$

Bezeichnet man $\sphericalangle\, AP_cS_c$ mit φ, $\sphericalangle\, BP_cS_c$ mit $\gamma - \varphi$ und beachtet man, dass $\sin\sphericalangle\, AS_cP_c = \sin\sphericalangle\, BS_cP_c$, so folgt für den absoluten Betrag des Teilverhältnisses (ABS_c) der Wert

$$|\,(A\,B\,S_c)\,| = \left|\frac{AS_c}{BS_c}\right| = \left|\frac{s_a \sin\varphi}{s_b \sin(\gamma-\varphi)}\right| \tag{1}$$

Dabei muss vorausgesetzt werden, dass S_c nicht mit A oder B zusammenfällt.

Wendet man den Satz über Zentriwinkel auf den Kreis k_c über der Sehne AP_c an, so findet man die Winkelgleichheiten $\sphericalangle\, AP_cS_c = \sphericalangle\, P'P_cB = \varphi$, $\sphericalangle\, BP_cS_c = \sphericalangle\, P'P_cA = \gamma - \varphi$. Bezeichnet T_c den Fusspunkt des Lotes aus P' auf die Seite $[AB]$, so gilt für den Absolutbetrag des Teilverhältnisses (ABT_c) analog zu (1)

$$|\,(A\,B\,T_c)\,| = \left|\frac{AT_c}{BT_c}\right| = \left|\frac{s_a \sin(\gamma-\varphi)}{s_b \sin\varphi}\right| \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt die Beziehung

$$|\,(A\,B\,S_c)\,| = \frac{s_a^2}{s_b^2}\,\frac{1}{|\,(ABT_c)\,|} \tag{3}$$

Liegt T_c ausserhalb der Strecke AB, so ist entweder $\sphericalangle\, ABP_c$ oder $\sphericalangle\, BAP_c$ grösser als 90°. Dann aber muss der Umkreismittelpunkt ausserhalb des Dreiecks ABP_c und somit S_c ausserhalb der Strecke AB liegen, und umgekehrt. Es liegen also T_c und S_c immer zugleich ausserhalb oder innerhalb der Strecke AB. Daher haben die Teilverhältnisse (ABS_c) und (ABT_c) das gleiche Vorzeichen; die Absolutstriche in (3) können weggelassen werden.

Nach zyklischer Vertauschung von (3) erhält man

$$(A\,B\,S_c)\,(B\,C\,S_a)\,(C\,A\,S_b) = [(A\,B\,T_c)\,(B\,C\,T_a)\,(C\,A\,T_b)]^{-1} \tag{4}$$

Eine Deutung dieser Gleichung mit Hilfe des Satzes von Menelaos ergibt: *Dann und nur dann liegen die Spurpunkte S_a, S_b, S_c der Torusnormalen auf einer Geraden, wenn T_a, T_b, T_c, die Fusspunkte der Lote aus P' auf die Seiten des Dreiecks $\triangle$, auf einer Geraden liegen.*

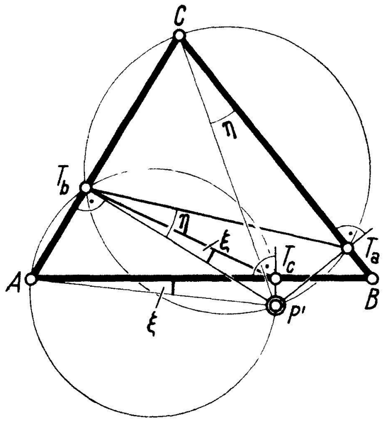
Die Frage, wann nun T_a, T_b, T_c kollinear liegen, beantwortet der *Satz von* WALLACE[4]), welcher der Vollständigkeit halber hier abgeleitet wird:

---

[3]) Definition: $(ABS_c) = AS_c/BS_c$ unter Beachtung der Richtungen der Strecken AS_c und BS_c.

[4]) Enz. d. Math. Wiss. III AB10, Nr. 11, Nr. 14. Vgl. auch Fussnote 2.

Die Punkte P', A, T_b, T_c und P', C, T_a, T_b liegen nach dem Satz von Thales je auf einem Kreis (siehe Figur 2). Bei allgemeiner Wahl von P' ergeben sich aus dem Peripheriewinkelsatz folgende gleiche Winkel: $\xi = \sphericalangle\, P'AB = \sphericalangle\, P'T_bT_c$, $\eta =$



Figur 2

$\sphericalangle\, P'CB = \sphericalangle\, P'T_bT_a$. Also unterscheiden sich ξ und η um $\sphericalangle\, T_aT_bT_c$. Genau dann, wenn T_a, T_b, T_c auf einer Geraden liegen, müssen ξ und η gleich sein, daher die vier Punkte A, B, C, P' auf einem Kreis liegen. Also: *Dann und nur dann liegen T_a, T_b, T_c auf einer Geraden, wenn P' auf den Umkreis des Dreiecks $\triangle$ fällt.*

In Verbindung mit der Deutung von (4) erhält man das Ergebnis: *Die gefährliche Fläche beim räumlichen Rückwärtsschnitt ist jener Drehzylinder, der die Ebene ε nach dem Umkreis des Dreiecks $\triangle$ schneidet.*

H. STACHEL, Graz

On a Diophantine Equation

A. SCHINZEL and W. SIERPIŃSKI [2][1]) have recently showed that all solutions of the equation

$$(x^2 - 1)(y^2 - 1) = \left(\left(\frac{y-x}{2}\right)^2 - 1\right)^2 \tag{1}$$

in natural numbers x, y, $x < y$ are of the form $x = x_n$, $y = x_{n+1}$, $n = 0, 1, \ldots$, where $x_0 = 1$, $x_1 = 3$, $x_{n+2} = 6\, x_{n+1} - x_n$. Equation (1) is a special case of the equation

$$(x^2 - 1)(y^2 - 1) = (z^2 - 1)^2 \tag{2}$$

whose all solutions are still unknown (cf. [2]–[5]). Moreover, the only known solution of (2) which is not a solution of (1) is $x = 4$, $y = 31$, $z = 11$ ([5]; cf. [2], [3]).

The purpose of this note is to give all solutions in natural numbers t, x, y of the equation

$$(x^2 - t^2)(y^2 - t^2) = \left(\left(\frac{y-x}{2}\right)^2 - t^2\right)^2. \tag{3}$$

---

[1]) Numbers in brackets refer to References, page 38.