

# Ungelöste Probleme

Objektyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **23 (1968)**

Heft 1

PDF erstellt am: **13.09.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Da  $|M_\beta| = C$  und die rechtsgeschriebenen Mengen von einer Mächtigkeit  $< C$  sind, muss so ein  $X_\gamma$  existieren. Wir definieren nun

$$V'_{\alpha\beta} = \bigcup_{\delta \leq \alpha} T_\delta^{-1}(V_{\alpha\beta}) \cup \{X'_\varepsilon\},$$

wo  $X'_\varepsilon$  das erste Element von  $M_\beta$  ist, das nicht zu  $U_\alpha \cup \bigcup_{\delta < \beta} V_{\alpha\delta}$  gehört.

Wenn nun  $S = \bigcup S_\alpha$ , dann enthält für jedes Paar von Ordinalzahlen  $\beta, \gamma$  ( $|\beta|, |\gamma| < C$ ) die Menge  $(S - T_\beta(S)) \cap M_\gamma$  die Punkte von  $V_{\alpha\gamma}$  für jedes  $\alpha \geq \max\{\beta, \gamma\}$ . Die Menge  $S - T_\beta(S)$  ist also zusammenhängend und  $S$  ist überall dicht. Andererseits trifft die Komplementärmenge  $S' = \bigcup S'_\alpha$  nach Konstruktion auch jedes  $M_\gamma$ , ist also sicher überall dicht.

Mit derselben Methode könnte man folgende Verallgemeinerung von Satz 2 beweisen:

*Satz 2'*. Es sei  $T$  eine Menge von eineindeutigen Abbildungen eines reellen Vektorraumes  $V$  der Dimension  $\leq \aleph_0$  in sich, so dass  $|T| \leq C$  und die Fixpunkte von weniger als  $C$  Abbildungen aus  $T$  den Raum nicht trennen. Dann gibt es eine Menge  $S \subset V$ , die zugleich mit ihrem Komplement überall dicht ist und die die  $F$ -Eigenschaft für  $T$  hat.

PAUL ERDÖS, Mathematisches Institut, Budapest und  
E. G. STRAUS\*), University of California, Los Angeles

#### LITERATUR

- [1] L. FEJES-TÓTH, *Eine Kennzeichnung des Kreises*, *El. Math.* 21, 25–27 (1967).  
[2] H. KNESER, *Eine Erweiterung des Begriffes «konvexer Körper»*, *Math. Ann.* 82, 287–296 (1921).

\*) The work of the second author was supported in part by a grant from the National Science Foundation.

## Ungelöste Probleme

Nr. 49. Es bezeichne  $R$  den dreidimensionalen euklidischen Raum,  $Z \in R$  einen fest gewählten Ursprung und  $A \subset R$  einen eigentlichen Eikörper, der den Ursprung enthält, so dass fortab stets  $Z \in A$  vorausgesetzt ist. Bedeutet  $V$  das Volumen, so gilt offenbar  $V(A) > 0$ . Ferner bezeichne  $E_u \subset R$  die durch  $Z$  hindurchgehende Ebene, deren Normalenrichtung durch den Einheitsvektor  $u$  gegeben ist. Schliesslich soll  $f$  den ebenen Flächeninhalt anzeigen, so dass  $f(A \cap E_u)$  die Schnittfläche darstellt, welche die Ebene  $E_u$  aus dem Eikörper  $A$  ausschneidet.

Unser Interesse gilt den beiden durch die Ansätze

$$p = \sup_A \inf_u [f(A \cap E_u)]^3 [V(A)]^{-2} \quad (1)$$

$$q = \inf_A \sup_u [f(A \cap E_u)]^3 [V(A)]^{-2} \quad (2)$$

definierten Zahlwerten. Die Existenz von  $q$  ist trivial, diejenige von  $p$  ergibt sich weiter unten.

Das mit (1) angesetzte Problem in etwas anderer gleichwertiger Weise formuliert, lautet wie folgt:

*Gesucht ist der grösste Wert, den der kleinste Flächeninhalt der Schnittbereiche annehmen kann, die von den durch einen Punkt eines Eikörpers vom Volumen  $V = 1$  hindurchgehenden Ebenen aus diesem ausgeschnitten werden.*

Die Lösung dieses Problems ist einfach, und der mit (1) gefragte MaxMin-Wert  $p$  ist durch

$$p = 9\pi/16 \sim 1,767 \tag{3}$$

gegeben. Der Extremwert (3) stellt sich ein, wenn  $A$  eine Kugel mit Zentrum  $Z$  ist. Der Nachweis unserer Behauptung ergibt sich leicht mit einer integralgeometrischen Ungleichung von H. BUSEMANN<sup>1)</sup>, wonach

$$\frac{1}{4\pi} \int [f(A \cap E_u)]^3 d u \leq \frac{9\pi}{16} V(A)^2 \tag{4}$$

ist. Hierbei bezeichnet  $d u$  die Richtungsichte, also die linke Seite den über alle Richtungen  $u$  erstreckten Integralmittelwert der dritten Potenz der Schnittfläche von  $A$  mit  $E_u$ . Aus der Busemannschen Ungleichung (4) folgert man zunächst, dass

$$\inf_u [f(A \cap E_u)]^3 [V(A)]^{-2} \leq 9\pi/16$$

sein muss, also damit erstens die Existenz von  $p$  und zweitens die Abschätzung  $p \leq 9\pi/16$ . Mit der Bemerkung, dass eine Kugel mit Zentrum  $Z$  das Gleichheitszeichen beansprucht, schliesst man auf (3).

Überraschenderweise scheint nun das mit (2) angeschnittene Problem schwieriger zu sein. Wenn über  $A$  keine zusätzliche Forderung gestellt wird, beispielsweise etwa die Voraussetzung, zentralsymmetrisch zu sein<sup>2)</sup>, so ist sicher, dass hier nicht die Kugel extremal ist und dass der mit (2) erfragte MinMax-Wert  $q$  kleiner als  $9\pi/16$  sein muss. Durch das unten erklärte Beispiel wird belegt, dass

$$q \leq 243/32 \pi^2 \sim 0,769 \tag{5}$$

gilt. In der Tat: Wählt man für  $A$  einen geraden Kreiskegel mit Spitze  $Z$ , der Höhe  $h = 1$  und mit Grundkreisradius  $r = \sqrt{2}$ , so folgt mit elementarer Diskussion zunächst  $\sup_u f(A \cap E_u) = 3/2$  und  $V(A) = 2\pi/3$ , so dass also bei diesem speziellen Körper  $\sup_u [f(A \cap E_u)]^3 [V(A)]^{-2} = 243/32 \pi^2$  und damit unsere Behauptung (5) resultiert.

Ungelöst bleibt unseres Wissens also das mit (2) eröffnete Problem, das wir wie oben bei (1) in gleichwertiger Weise etwas anders formulieren: *Gesucht ist der kleinste Wert, den der grösste Flächeninhalt der Schnittbereiche annehmen kann, die von den durch einen Punkt eines Eikörpers vom Volumen  $V = 1$  hindurchgehenden Ebenen aus diesem ausgeschnitten werden.*

Diese sprachliche Fassung unserer Frage unterstellt, dass die gesuchte Schranke auch angenommen wird und bei einem nichtkugelförmigen unbekanntem Extremalkörper realisiert werden kann. Dies ist abzuklären.

H. HADWIGER

<sup>1)</sup> Unsere Ungleichung ist ein Spezialfall einer sehr allgemeinen Integralrelation, die sich auf  $n - 1$  verschiedene Eikörper des  $n$ -dimensionalen Raumes bezieht. Vgl. H. BUSEMANN, Volume in Terms of Concurrent Cross Sections, Pac. J. Math. 3, 1-12 (1953).

<sup>2)</sup> In diesem besonderen Fall, also für Mittelpunktseikörper, zeigt sich, dass  $q = 9\pi/16$  dann gilt, wenn die mit dem Ungelösten Problem Nr. 44, El. Math. 17, 84 (1962) dargelegte Busemannsche Ungleichungsaussage zutrifft. Vgl. hierzu H. BUSEMANN und C. M. PETTY, Problems on Convex Bodies, Math. Scand. 4, 88-94 (1956); insb. Problem 4.