Bericht

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **23 (1968)**

Heft 1

Aufgabe 568. Es sei P_m eine Menge von m verschiedenen Primzahlen und $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$ die Folge aller natürlichen Zahlen, deren Primzahlzerlegung nur Primzahlen aus P_m enthält. Ist m nicht endlich, so ist nach Aufgabe 508 (El. Math. *21*, 112 (1966))

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}^{-1}$$

mmer rrational, wobei $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ das k.g.V. von $a_1, a_2, \ldots, a_n$ bedeutet. Für $m = 1$ ist S rational. Der Aufgabensteller kennt keine weiteren m, für die S rational ist. Gibt es solche m oder ist S für $m > 1$ immer irrational? P. Erdös

Bericht

Ein mathematischer Problemwettbewerb im Kanton Bern

Die Informationsstelle für Mathematikunterricht, ein kantonal-bernisches Zentrum zur Förderung und Modernisierung des Mathematikunterrichts an den bernischen Schulen, hat vom Oktober 1966 bis zum Mai 1967 einen Problemwettbewerb («Olympiade») an den Gymnasien, Techniken und Seminarien des Kantons Bern organisiert. Es wurden vier Runden zu je fünf Aufgaben durchgeführt, wobei die Teilnehmer pro Runde 3–4 Wochen Zeit zur Lösung erhielten: Die Aufgaben wurden an sämtliche Mittelschüler des Kantons versandt; insgesamt beteiligten sich rund hundert Schüler am Wettbewerb. Bei der Bewertung der Lösungen wurden auch die sprachlich korrekte Darstellung und die Originalität berücksichtigt. Elf Schüler mit den höchsten Punktezahlen nahmen schliesslich an der fünften Runde teil, bei welcher fünf weitere Aufgaben während dreier Stunden unter Aufsicht zu lösen waren. Die drei Gewinner des Wettbewerbs erhielten Büchergutscheine. Es mag interessieren, dass die Schulnoten in Mathematik der drei Preisträger, alles Gymnasiasten, einen Durchschnitt von 5,9 aufweisen.

Der Leser findet anschliessend die 25 Aufgaben kurz dargestellt. Die den Schülern ausgehändigten Fassungen waren oft eingekleidet und von Erklärungen und Figuren begleitet. Die Probleme sind teilweise Originalprobleme, teilweise entstammen sie Aufgabensammlungen ähnlicher Wettbewerbe oder dem Aufgabenteil von Fachzeitschriften. Manchmal war es nötig, sie durch Vereinfachungen auf das den Schülern zugängliche Niveau zu bringen.

1.1 Ein Rechteck ist in 35 kongruente quadratische Felder unterteilt. Vom Zentralfeld aus soll ein Weg genau einmal durch alle Felder führen und in einem Randfeld enden, wobei nur Zwischenstrecken, keine Ecken durchlaufen werden dürfen. Beweise, dass ein solcher Weg unmöglich ist.

1.2 Beweise: die Folge der Endziffern der Zahlen n^{n+1} ($n = 1, 2 3 \ldots$) ist periodisch. Gib eine volle Periode an.

1.3 Einem beliebigen konvexen und zentralsymmetrischen Sechseckbereich sei ein Dreieckbereich einbeschrieben. Weise nach, dass der Flächeninhalt des Dreiecks höchstens halb so gross sein kann wie der Inhalt des Sechsecks. Gibt es Fälle, bei denen das Gleichheitszeichen eintritt?

1.4 Im Zahlenschema

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & 1 & 1 & & \\ & 1 & 2 & 3 & 2 & 1 & \\ 1 & 3 & 6 & 7 & 6 & 3 & 1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

ist jede Zahl die Summe der drei über ihr stehenden (Ergänzung durch Nullen). Beweise, dass in jeder Zeile, mit Ausnahme der ersten beiden, mindestens eine von null verschiedene gerade Zahl vorkommen muss.

1.5 In wieviele Gebiete teilen n Parallelenpaare die Ebene höchstens?

2.1 Die Seitenflächen eines regulären Oktaeders werden durch 8 gegebene Farben gefärbt, wobei jede Fläche eine verschiedene Farbe erhalten muss. Wieviele nicht äquivalente Färbungen sind möglich? (Äquivalent = durch Rotation überführbar).

2.2 Die ganze Zahl m sei gerade und > 2. Beweise, dass es unendlich viele ungerade Zahlen gibt, die nicht als Summe einer Potenz von m (mit einem 1 übersteigenden Exponenten) und einer Primzahl dargestellt werden können.

2.3 Auf 12 Flugplätzen mit paarweise verschiedenen Entfernungen steht je ein Flugzeug. Jedes dieser Flugzeuge fliegt zum nächstgelegenen Platz, worauf für jeden Platz die Anzahl z der jetzt auf ihm stehenden Flugzeuge gezählt wird. Welches ist die grösstmögliche Anzahl z?

2.4 Suche ein Verfahren, mit dem man unendlich viele, wesentlich verschiedene Tripel (a, b, c) natürlicher Zahlen finden kann, die der Beziehung $a^2 + b^2 - a\,b = c^2$ genügen. ((a, b, c) und $(k\,a, k\,b, k\,c)$ gelten nicht als wesentlich verschieden).

2.5 Gegeben ein Quadrat Q, das in eine gerade Anzahl Gitterquadrate unterteilt sei. Diese werden mit zwei Farben so gefärbt, dass Gitterquadrate, die zum Mittelpunkt von Q symmetrisch liegen, verschiedene Farben erhalten. Es sei S der Komplex aller Gitterstrecken, an denen verschiedenfarbige Quadrate zusammentreffen. Beweise, dass S stets einen zusammenhängenden, zum Mittelpunkt von Q symmetrischen Streckenzug enthält, der zwei gegenüberliegende Seiten von Q verbindet.

3.1 Im Raum seien 6 Punkte in allgemeiner Lage gegeben. Ihre Verbindungsstrecken werden beliebig mit zwei Farben gefärbt. Beweise, dass im Komplex dieser Strecken mindestens ein einfarbiges Dreieck vorkommen muss.

3.2 a, b, c, d, e seien fünf aufeinanderfolgende natürliche Zahlen, k eine natürliche Zahl. Zeige, dass die Potenzsumme $a^k + b^k + c^k + d^k + e^k$ genau dann durch 5 teilbar ist, wenn k nicht durch 4 teilbar ist.

3.3 In der Ebene sei eine ungerade Anzahl beliebiger und beliebig gelegener Kreise gegeben. Der Punkt P liege in keinem dieser Kreise. Beweise: durch P lässt sich sowohl mindestens eine Gerade legen, die eine ungerade Anzahl, wie auch mindestens eine solche, die eine gerade Anzahl (einschliesslich 0) der gegebenen Kreise trifft.

3.4 n Quadrate mit ganzzahligen Seitenlängen $1, 2, \ldots, n-1, n$ sollen gitterförmig in ein Quadrat mit ganzzahliger Seitenlänge N eingelagert werden. Beweise, dass dies sicher möglich ist, wenn $N \geqslant n\sqrt{n}$.

3.5 a und n seien gegebene natürliche Zahlen. Gibt es natürliche Zahlen b, welche die Beziehung $(\sqrt{a+1} - \sqrt{a})^n = \sqrt{b} - \sqrt{b-1}$ erfüllen?

4.1 Ein beliebiges stumpfwinkliges Dreieck soll in spitzwinklige Dreiecke zerlegt werden. Wie gross ist die Minimalanzahl von Zerlegungsdreiecken? Gib ein Beispiel einer möglichen Zerlegung an.

4.2 Spieler A legt drei Münzen so aus, dass sie nicht alle «Kopf» zeigen. Spieler B lässt, ohne hinzusehen, sukzessive eine der drei Münzen umdrehen, um dadurch die Endstellung «Kopf-Kopf-Kopf» zu erreichen. Spieler A meldet nach jedem Zug, ob die Endstellung erreicht ist oder nicht. Welches ist die minimale Zugzahl, die Spieler B mit Sicherheit zur Endstellung führt? Gib eine mögliche Gewinnstrategie an.

4.3 Beweise die Minimalität der in 4.2 gefundenen Zugzahl. Welches ist die vermutliche minimale Zugzahl bei n Münzen?

4.4 Ein Quadrat mit ganzzahliger, durch 4 teilbarer Seitenlänge lässt sich in «T-Bereiche» (aus vier Einheitsquadraten zusammengesetzte, T-förmige Polyominos) zerlegen. Beweise, dass eine solche Zerlegung für alle andern Quadrate mit ganzzahliger Seitenlänge nicht möglich ist.

4.5 Auf einer Party tanzt jede Dame mit mindestens einem Herrn, keiner der Herrn tanzt mit allen Damen. Weise nach, dass es zwei Paare (D, H) und (D', H') gibt, die miteinander (D mit H, D' mit H'), aber nicht übers Kreuz (D mit H', D' mit H) tanzen.

5.1 Beweise: ist p eine Primzahl $\geqslant 5$, so ist $p^2 - 1$ durch 24 teilbar.

5.2 Es sei z die Anzahl der Menschen, die eine ungerade Anzahl Händedrucke mit andern Menschen gewechselt haben. Zeige, dass z gerade ist.

5.3 Beweise, dass ein Rechteck nicht in drei flächengleiche Dreiecke zerlegt werden kann.

5.4 In jede Zelle einer die Ebene bedeckenden Sechseckwabe soll eine natürliche Zahl so eingefüllt werden, dass jede Zahl das arithmetische Mittel der sechs Nachbarzahlen ist. Gib alle möglichen Einfüllungen dieser Art an.

5.5 In der Ebene seien n beliebige Kreise in allgemeiner Lage gegeben. Die dadurch in der Ebene abgegrenzten Gebiete sollen so gefärbt werden, dass Gebiete mit gemeinsamen Grenzbögen (nicht Ecken) verschiedene Farben erhalten. Dabei sollen möglichst wenige Farben verwendet werden.

(Aufgaben 5.1–5.5 waren in drei Stunden zu lösen.)

JANY BINZ, PETER WILKER, Bern

Literaturüberschau

Handbuch der Mathematik. Von L. KUIPERS und R. TIMMAN. 830 Seiten. DM 48,–. Verlag Walter de Gruyter & Co., Berlin 1968.

Ein neues Handbuch der Mathematik herauszugeben, ist ein gewichtiges Unternehmen und gewichtig ist auch der 830 Seiten umfassende Band. Nun so neu ist das Handbuch nicht, hat es doch in seiner holländischen Ausgabe bereits seine Probe gut bestanden und es ist dem Verlag zu danken, dass dieses Werk nun auch in deutscher Sprache vorliegt. Es ist entstanden aus Vorlesungen für Ingenieure an der technischen Hochschule Delft und orientiert sich an Problemen aus der Praxis. Wie es sich bei einer so umfassenden Materie versteht, wurde der Stoff auf zahlreiche Mitarbeiter verteilt. C. H. VAN OS berichtet über Geschichte der Mathematik, Zahlen und Zahlenfolgen, das Unendliche, das Irrationale, das unendlich Kleine und die Entwicklung der Analysis. F. LOONSTRA behandelt das Zahlsystem, lineare Algebra und Analytische Geometrie. B. MEULENBELD übernahm das grosse Gebiet der Differential- und Integralrechnung, dazu noch die Theorie der Funktionen von zwei Veränderlichen, die partielle Differentiation und die mehrfachen Integrale. Einer der Herausgeber, L. KUIPERS, steuerte das Kapitel über Zahlenfolgen und Reihen bei. Die Funktionentheorie bearbeitete H. J. A. DUPARC. Die beiden grossen Abschnitte über gewöhnliche Differentialgleichungen und spezielle Funktionen schrieb S.C. VAN VEEN. Der zweite Herausgeber, R. TIMMAN, gibt eine Übersicht über die Vektoranalysis und die partiellen Differentialgleichungen. Die numerische Analysis fand in IR. L. KOSTEN ihren Bearbeiter. Von IR. J. W. COHEN stammt der Beitrag über die Laplace-Transformationen. Den Abschluss bildet ein ausführliches Kapitel über Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik von J. HEMELRIJK, wobei aber auf die statistischen Prozesse, die sich auf Folgen abhängiger Zufallsgrössen beziehen, nicht eingegangen wird. Das Werk ist von besonderem Interesse, weil es sich stark von den bei uns bekannten Darstellungen abhebt. Das leicht lesbare Handbuch dürfte daher auch bei unseren Ingenieuren auf Interesse stossen. Der Mathematiker wird das Werk mit Vorteil heranziehen, wenn er sich praktischen Problemen zuwenden will. Naturgemäss hat es in diesem umfangreichen Band nur wenige Übungsaufgaben (ohne Lösungen). Die Geometrie findet zu wenig Berücksichtigung. P. BUCHNER

Zahlentheorie III. Von L. HOLZER. Math.-Nat.-Bibl. Band 14a, 146 Seiten, 23,-MDN. B.G. Teubner, Leipzig 1965.

Das erste dieser «ausgewählten Kapitel aus der Zahlentheorie» ist neueren Untersuchungen über die (stets mögliche) Darstellung einer rationalen Zahl als Summe endlich vieler verschiedener Stammbrüche gewidmet. Das zweite Kapitel enthält den SELBERGschen «elementaren» Beweis des Primzahlsatzes. Beim Beweis des DIRICHLETschen Satzes über die arithmetische Progression im dritten Kapitel wird der funktionentheoretischen Methode (nach Bereitstellung des erforderlichen Apparates) der Vorzug gegeben, da nach Ansicht des Verfassers die existierenden «elementaren» Beweise ganz ausserordent-