

# Un théorème sur les nombres triangulaires

Autor(en): **Sierpiski, W.**

Objektyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **23 (1968)**

Heft 2

PDF erstellt am: **13.09.2024**

Persistenter Link: <https://doi.org/10.5169/seals-26027>

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## Un théorème sur les nombres triangulaires

Les nombres triangulaires sont des nombres  $t_n = n(n+1)/2$ , où  $n = 1, 2, \dots$ . Le but de cette note est de démontrer d'une façon élémentaire le théorème suivant:

**Théorème.** *Il existe une infinité de nombres triangulaires qui sont à la fois sommes, différences et produits de deux nombres triangulaires  $> 1$ .*

*Démonstration.* Les nombres  $x = y = 1$  satisfont à l'équation

$$x(x+1) - 2y(y+1) + 2 = 0 \quad (1)$$

Or, vu l'identité

$$\begin{aligned} (3x+4y+3)(3x+4y+4) - 2(2x+3y+2)(2x+3y+3) \\ = x(x+1) - 2y(y+1) \end{aligned}$$

on voit que si les nombres naturels  $x$  et  $y$  satisfont à l'équation (1), les nombres naturels  $3x+4y+3$  et  $2x+3y+2$  qui sont plus grands que  $x$  et  $y$  satisfont aussi à l'équation (1). Cette dernière a donc une infinité de solutions en nombres naturels  $x$  et  $y$  plus grands que 1. Par exemple de la solution  $x = y = 1$  on obtient la nouvelle solution  $x = 10, y = 7$  qui donne ensuite la solution  $x = 61, y = 43$ , et ainsi de suite.

Soit  $x > 1$  et  $y > 1$  une solution de l'équation (1) en nombres naturels. D'après (1) on aura

$$t_x + 1 = 2t_y,$$

d'où

$$t_{t_x} = \frac{t_x(t_x+1)}{2} = t_x t_y. \quad (2)$$

Or, comme on le vérifie sans peine, on a, pour  $n = 2, 3, \dots$

$$n = t_n - t_{n-1} \quad \text{et} \quad t_{t_n} = t_{t_n-1} + t_n.$$

D'après (2) on a donc

$$t_{t_x} = t_{t_x-1} + t_x = t_{t_{t_x}} - t_{t_x-1} = t_x t_y.$$

Par exemple, pour  $x = 10, y = 7$ , on trouve

$$t_{55} = t_{54} + t_{10} = t_{1540} - t_{1530} = t_{10} t_7.$$

Or, on a aussi

$$t_8 = t_5 + t_6 = t_{13} - t_{10} = t_3 t_3, \quad t_{20} = t_{14} + t_{14} = t_{21} - t_6 = t_6 t_4.$$

Il est à remarquer que s'il s'agissait seulement de démontrer qu'il existe une infinité de nombres naturels qui sont à la fois sommes, différences et produits de deux nombres triangulaires  $> 1$ , on pourrait le faire d'une façon élémentaire en deux lignes, puisque ça résulte tout de suite de l'identité (qu'on vérifie sans peine):

$$t_{t_n-1} + t_{t_n} = t_{t_n^2} - t_{t_n^2-1} = t_n t_n \quad \text{pour} \quad n = 2, 3, \dots$$

Pour  $n = 2$  et  $n = 3$  on trouve, par exemple:

$$t_2 + t_3 = t_9 - t_8 = t_2 t_2, \quad t_5 + t_6 = t_{36} - t_{35} = t_3 t_3 = t_8.$$

Il existe des paires de nombres triangulaires dont la somme, la différence et le produit sont des nombres triangulaires, par exemple

$$t_{18} + t_{14} = t_{23}, \quad t_{18} - t_{14} = t_{11}, \quad t_{18} t_{14} = t_{189}.$$

Or, je ne sais pas s'il existe une infinité de tels paires.

W. SIERPIŃSKI, Varsovie

## Der Aufbau der Kongruenzgruppe im Raum durch Spiegelungen

(Fortsetzung)

### 4. Die Produkte aus 3 Ebenenspiegelungen

In unserer Aufzählung der Abbildungstypen in  $\mathfrak{R}$  fehlen uns nur noch die Produkte aus 3 Ebenenspiegelungen. Wir beginnen die Untersuchung dieser Abbildungen mit einem einfachen Beispiel.

Es seien drei Ebenen  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  vorgegeben, die paarweise senkrecht sind und sich in einem Punkt  $S$  schneiden. Die Kongruenz  $\Sigma_\alpha \circ \Sigma_\beta \circ \Sigma_\gamma$  führt auf zugeordnete Punktepaare  $A \bar{A}$ , die so liegen, dass stets  $S$  Mittelpunkt der Strecke  $A\bar{A}$  ist (Fig. 9).

$$\Omega = \Sigma_\alpha \circ \Sigma_\beta \circ \Sigma_\gamma = \Sigma_g \circ \Sigma_\gamma$$

Wegen der besonderen Lage der Ebenen  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  ist

$$\begin{aligned} \Omega = \Sigma_\alpha \circ \Sigma_\beta \circ \Sigma_\gamma &= \Sigma_\alpha \circ \Sigma_\gamma \circ \Sigma_\beta = \Sigma_\gamma \circ \Sigma_\alpha \circ \Sigma_\beta = \Sigma_\gamma \circ \Sigma_\beta \circ \Sigma_\alpha \\ &= (\Sigma_\alpha \circ \Sigma_\beta \circ \Sigma_\gamma)^{-1} = \Omega^{-1} \end{aligned}$$

und daher

$$\Omega^2 = \Omega \circ \Omega^{-1} = I.$$

Die Abbildung  $\Sigma_\alpha \circ \Sigma_\beta \circ \Sigma_\gamma$  ist somit eine Involution mit dem einzigen Fixpunkt  $S$ ; wir bezeichnen sie als Spiegelung am Punkt  $S$  und schreiben dafür  $\Sigma_S$ .

Wie die Fig. 10 zeigt, erhält man durch Zusammensetzen zweier Punktspiegelungen eine Translation:

$$\Sigma_F \circ \Sigma_G = (\Sigma_\alpha \circ \Sigma_\beta \circ \Sigma_\gamma) \circ (\Sigma_\gamma \circ \Sigma_\beta \circ \Sigma_\delta) = \Sigma_\alpha \circ \Sigma_\delta = T$$

wobei

$$\mathbf{v} = 2 \mathbf{a} = 2 \mathbf{F} \mathbf{G}.$$

Wir halten dieses Ergebnis fest in

**Satz 12:**  $\Sigma_F \circ \Sigma_G = T$  ist eine Translation; der Translationsvektor  $\mathbf{v}$  ist der zweimal genommene Vektor  $\mathbf{a}$  zwischen den Punkten  $F$  und  $G$  ( $\mathbf{a}$  zeigt von  $F$  nach  $G$ ). Umgekehrt kann eine vorgegebene Translation  $T$  mit dem Vektor  $\mathbf{v}$  auf unendlichviele Arten als Produkt von zwei Punktspiegelungen  $\Sigma_F$  und  $\Sigma_G$  geschrieben werden; es ist  $\mathbf{F} \mathbf{G} = 1/2 \mathbf{v}$ .