

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Band:** 23 (1968)  
**Heft:** 2

**Artikel:** Der Aufbau der Kongruenzgruppe im Raum durch Spiegelungen  
**Autor:** Jeger, M.  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-26028>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. [Siehe Rechtliche Hinweise.](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. [Voir Informations légales.](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. [See Legal notice.](#)

**Download PDF:** 19.11.2024

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

Pour  $n = 2$  et  $n = 3$  on trouve, par exemple:

$$t_2 + t_3 = t_9 - t_8 = t_2 t_2, \quad t_5 + t_6 = t_{36} - t_{35} = t_3 t_3 = t_8.$$

Il existe des paires de nombres triangulaires dont la somme, la différence et le produit sont des nombres triangulaires, par exemple

$$t_{18} + t_{14} = t_{23}, \quad t_{18} - t_{14} = t_{11}, \quad t_{18} t_{14} = t_{189}.$$

Or, je ne sais pas s'il existe une infinité de tels paires.

W. SIERPIŃSKI, Varsovie

## Der Aufbau der Kongruenzgruppe im Raum durch Spiegelungen

(Fortsetzung)

### 4. Die Produkte aus 3 Ebenenspiegelungen

In unserer Aufzählung der Abbildungstypen in  $\mathfrak{R}$  fehlen uns nur noch die Produkte aus 3 Ebenenspiegelungen. Wir beginnen die Untersuchung dieser Abbildungen mit einem einfachen Beispiel.

Es seien drei Ebenen  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  vorgegeben, die paarweise senkrecht sind und sich in einem Punkt  $S$  schneiden. Die Kongruenz  $\Sigma_\alpha \circ \Sigma_\beta \circ \Sigma_\gamma$  führt auf zugeordnete Punktepaare  $A \bar{A}$ , die so liegen, dass stets  $S$  Mittelpunkt der Strecke  $A\bar{A}$  ist (Fig. 9).

$$\Omega = \Sigma_\alpha \circ \Sigma_\beta \circ \Sigma_\gamma = \Sigma_g \circ \Sigma_\gamma$$

Wegen der besonderen Lage der Ebenen  $\alpha$ ,  $\beta$  und  $\gamma$  ist

$$\begin{aligned} \Omega = \Sigma_\alpha \circ \Sigma_\beta \circ \Sigma_\gamma &= \Sigma_\alpha \circ \Sigma_\gamma \circ \Sigma_\beta = \Sigma_\gamma \circ \Sigma_\alpha \circ \Sigma_\beta = \Sigma_\gamma \circ \Sigma_\beta \circ \Sigma_\alpha \\ &= (\Sigma_\alpha \circ \Sigma_\beta \circ \Sigma_\gamma)^{-1} = \Omega^{-1} \end{aligned}$$

und daher

$$\Omega^2 = \Omega \circ \Omega^{-1} = I.$$

Die Abbildung  $\Sigma_\alpha \circ \Sigma_\beta \circ \Sigma_\gamma$  ist somit eine Involution mit dem einzigen Fixpunkt  $S$ ; wir bezeichnen sie als Spiegelung am Punkt  $S$  und schreiben dafür  $\Sigma_S$ .

Wie die Fig. 10 zeigt, erhält man durch Zusammensetzen zweier Punktspiegelungen eine Translation:

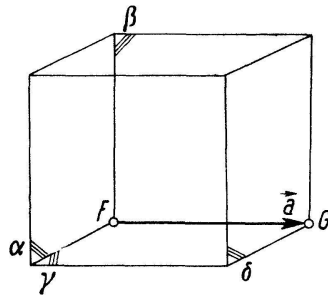
$$\Sigma_F \circ \Sigma_G = (\Sigma_\alpha \circ \Sigma_\beta \circ \Sigma_\gamma) \circ (\Sigma_\gamma \circ \Sigma_\beta \circ \Sigma_\delta) = \Sigma_\alpha \circ \Sigma_\delta = T$$

wobei

$$\mathbf{v} = 2 \mathbf{a} = 2 \mathbf{F} \mathbf{G}.$$

Wir halten dieses Ergebnis fest in

**Satz 12:**  $\Sigma_F \circ \Sigma_G = T$  ist eine Translation; der Translationsvektor  $\mathbf{v}$  ist der zweimal genommene Vektor  $\mathbf{a}$  zwischen den Punkten  $F$  und  $G$  ( $\mathbf{a}$  zeigt von  $F$  nach  $G$ ). Umgekehrt kann eine vorgegebene Translation  $T$  mit dem Vektor  $\mathbf{v}$  auf unendlichviele Arten als Produkt von zwei Punktspiegelungen  $\Sigma_F$  und  $\Sigma_G$  geschrieben werden; es ist  $\mathbf{F} \mathbf{G} = 1/2 \mathbf{v}$ .



Figur 10

Wir stellen uns jetzt die Aufgabe, die möglichen Typen von 3spiegeligen Kongruenzen

$$\Omega = \Sigma_\alpha \circ \Sigma_\beta \circ \Sigma_\gamma$$

aufzuzählen. Hierzu sind die euklidisch verschiedenen Lagen der drei Ebenen  $\alpha, \beta, \gamma$  zu betrachten. Es sind die folgenden Fälle zu unterscheiden:

a)  $\alpha, \beta, \gamma$  sind parallel

Die Fig. 11a zeigt diese Situation in Normalprojektion, wobei die drei Ebenen projizierend angenommen wurden. Auf Grund von Satz 2 lässt sich sofort eine Ebene  $\epsilon$  finden, so dass  $\Sigma_\beta \circ \Sigma_\gamma = \Sigma_\alpha \circ \Sigma_\epsilon$  ist. Dann wird aber

$$\Omega = \Sigma_\alpha \circ \Sigma_\beta \circ \Sigma_\gamma = \Sigma_\alpha \circ \Sigma_\alpha \circ \Sigma_\epsilon = \Sigma_\epsilon$$

$\Omega$  ist also in diesem Falle auf eine reine Ebenenspiegelung reduzierbar.

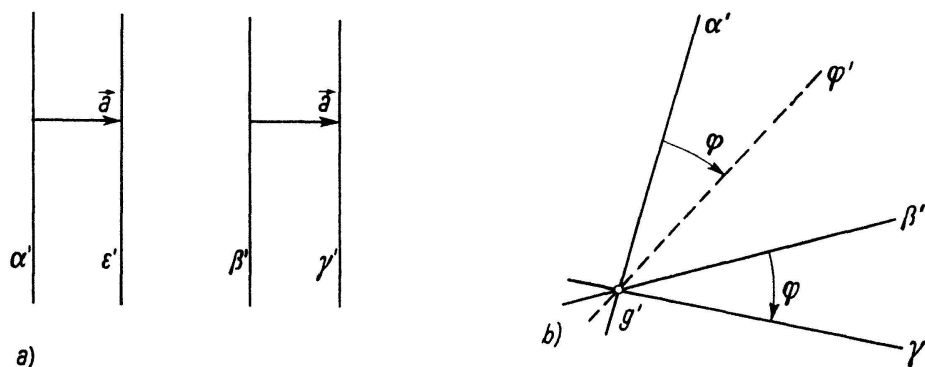
b)  $\alpha, \beta, \gamma$  gehen durch eine Gerade  $g$

Diese Situation ist in der Fig. 11b aufgezeichnet, wobei die Gerade  $g$  projizierend angenommen wurde. Hier lässt sich auf Grund von Satz 3 eine Ebene  $\varphi$  finden, so dass  $\Sigma_\beta \circ \Sigma_\gamma = \Sigma_\alpha \circ \Sigma_\varphi$  gilt und wir erhalten

$$\Omega = \Sigma_\alpha \circ \Sigma_\beta \circ \Sigma_\gamma = \Sigma_\alpha \circ \Sigma_\alpha \circ \Sigma_\varphi = \Sigma_\varphi$$

Es ist also auch hier  $\Omega$  auf eine reine Ebenenspiegelung reduzierbar.

In den Situationen a) und b) haben wir drei Ebenen  $\alpha, \beta, \gamma$ , die im Büschel liegen. Interessanter sind nun die übrigbleibenden Fälle.



Figur 11

c)  $\alpha, \beta, \gamma$  sind parallel zu einer Richtung, sie liegen aber nicht im Büschel

In der Fig. 12a wurde die ausgezeichnete Richtung senkrecht zur Projektionsebene angenommen. Wir setzen nun voraus, dass  $\beta$  und  $\gamma$  mit einer Geraden  $f$  inzident

sind<sup>7)</sup>.  $\varepsilon$  sei dann die Normalebene zu  $\alpha$  durch  $f$  und  $\delta$  sei jene Ebene durch  $f$ , für die  $\sphericalangle(\beta, \gamma) = \sphericalangle(\varepsilon, \delta)$  ist. Wir haben dann

$$\Omega = \Sigma_\alpha \circ \Sigma_\beta \circ \Sigma_\gamma = \Sigma_\alpha \circ \Sigma_\varepsilon \circ \Sigma_\delta = \Sigma_g \circ \Sigma_\delta$$

$g$  bezeichnet die Schnittgerade von  $\alpha$  und  $\varepsilon$ . Weiter sei jetzt  $\mu$  die Normalebene zu  $\delta$  durch  $g$  und  $\nu$  sei die Normalebene zu  $\mu$  durch  $g$ . Es ist dann offenbar

$$\Sigma_g = \Sigma_\alpha \circ \Sigma_\varepsilon = \Sigma_\nu \circ \Sigma_\mu$$

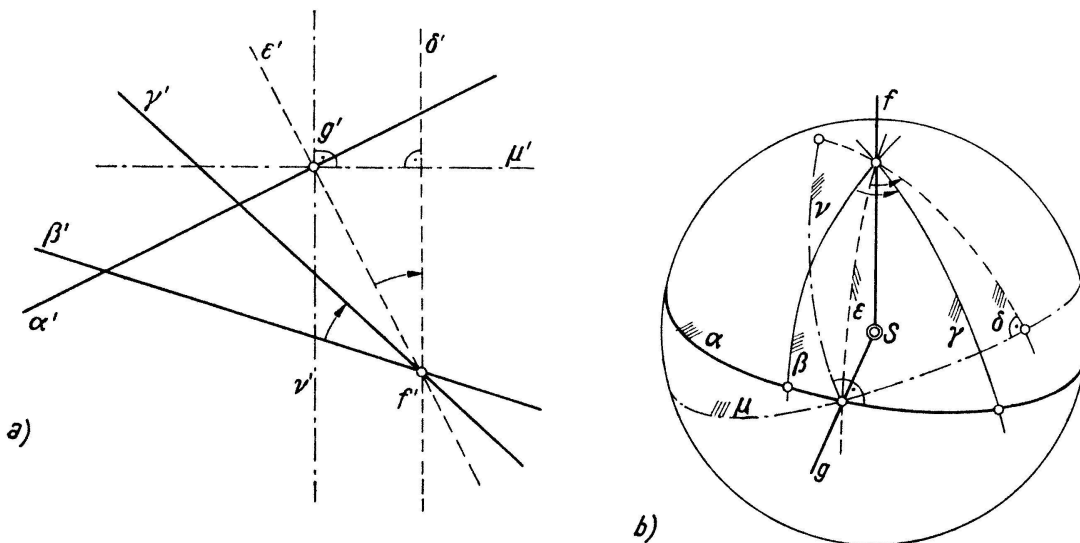
so dass

$$\Omega = \Sigma_g \circ \Sigma_\delta = \Sigma_\nu \circ \Sigma_\mu \circ \Sigma_\delta \quad \text{mit} \quad \mu \perp \nu, \delta; \nu \parallel \delta$$

Benutzt man noch die Eigenschaft, dass zwei Spiegelungen an senkrechten Ebenen vertauschbar sind, so folgt

$$\Omega = \Sigma_\nu \circ \Sigma_\mu \circ \Sigma_\delta = \Sigma_\mu \circ \underbrace{\Sigma_\nu \circ \Sigma_\delta}_T = \underbrace{\Sigma_\nu \circ \Sigma_\delta}_T \circ \Sigma_\mu$$

$T$  ist die Translation mit dem Vektor  $\mathbf{v} = 2\mathbf{a}$ . Unsere Abbildung  $\Omega$  ist die Verbindung aus der Spiegelung an der Ebene  $\mu$  und aus einer Translation, deren Vektor parallel zur Ebene  $\mu$  verläuft. Die beiden genannten Teile sind vertauschbar. Die vorliegende Abbildung  $\Omega$  wird als *Schubspiegelung* bezeichnet.



Figur 12

d)  $\alpha, \beta, \gamma$  gehen durch einen Punkt  $S$ , liegen aber nicht im Büschel

Um die nachfolgende Reduktion besser überblicken zu können, denken wir uns sämtliche vorkommenden Ebenen mit einer Kugel geschnitten, die ihr Zentrum in  $S$  hat (Fig. 12b).

Ist  $\varepsilon$  die Normalebene zu  $\alpha$  durch  $f$  und  $\delta$  die Ebene durch  $f$ , für die  $\sphericalangle(\beta, \gamma) = \sphericalangle(\varepsilon, \delta)$  ist, so folgt wiederum

$$\Omega = \Sigma_\alpha \circ \Sigma_\beta \circ \Sigma_\gamma = \Sigma_\alpha \circ \Sigma_\varepsilon \circ \Sigma_\delta = \Sigma_g \circ \Sigma_\delta$$

<sup>7)</sup> Andernfalls führe man die entsprechende Reduktion des Spiegelungsproduktes von vorne her durch. Da die 3 Ebenen nicht parallel sind, steht immer eine der beiden Möglichkeiten offen.



$g$  bezeichnet die Schnittgerade von  $\alpha$  und  $\varepsilon$ . Wir führen jetzt wieder die Normalebene  $\mu$  zu  $\delta$  durch  $g$  ein und  $\nu$  sei die Normalebene zu  $\mu$  durch  $g$ . Es ist dann

$$\Sigma_g = \Sigma_\alpha \circ \Sigma_\varepsilon = \Sigma_\nu \circ \Sigma_\mu$$

und dies führt zur Darstellung

$$\Omega = \Sigma_g \circ \Sigma_\delta = \Sigma_\nu \circ \Sigma_\mu \circ \Sigma_\delta \quad \text{mit} \quad \mu \perp \nu, \delta$$

Durch Vertauschen nebeneinander stehender Spiegelungen an senkrechten Ebenen folgt weiter

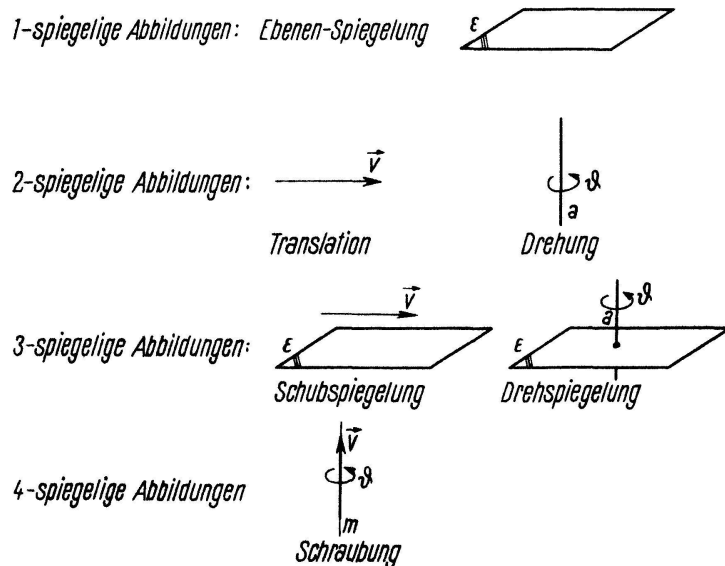
$$\Omega = \Sigma_\nu \circ \Sigma_\mu \circ \Sigma_\delta = \Sigma_\mu \circ \underbrace{\Sigma_\nu \circ \Sigma_\delta}_{\Delta_a} = \underbrace{\Sigma_\nu \circ \Sigma_\delta}_{\Delta_a} \circ \Sigma_\mu$$

$\Delta_a$  ist eine Drehung um die Normale  $a$  zur Ebene  $\mu$  durch den Punkt  $S$ . Unsere Abbildung  $\Omega$  ist die Verbindung aus der Spiegelung  $\Sigma_\mu$  und aus einer Drehung, deren Achse normal zur Ebene  $\mu$  steht. Die beiden genannten Bestandteile sind wiederum vertauschbar. Im vorliegenden Falle wird  $\Omega$  als *Drehspiegelung* bezeichnet<sup>8)</sup>.

**Satz 13:** *Jede ungleichsinnige Kongruenz ist eine Schubspiegelung (für  $\nu = 0$  eine reine Ebenenspiegelung) oder eine Drehspiegelung.*

### 5. Gruppentheoretische Aspekte

$K$  wurde als Menge aller endlichen Produkte aus Ebenenspiegelungen definiert. Unsere Untersuchungen haben gezeigt, dass man sich auf die Produkte aus höchstens 4 Ebenenspiegelungen beschränken kann. Auf Grund der Anzahl der notwendigen Faktoren bei der Erzeugung aus Ebenenspiegelungen gibt es in  $K$  1spiegelige, 2spiegelige, 3spiegelige und 4spiegelige Kongruenzen.



Figur 13

In der Fig. 13 sind diese 4 Klassen zusammengestellt, wobei die wesentlichen Bestimmungsstücke der betreffenden Abbildungstypen aufgezeichnet sind.

<sup>8)</sup> In der Fig. 12b tritt der Zusammenhang zwischen der euklidischen Geometrie im Bündel von  $S$  und der sphärischen Geometrie deutlich in Erscheinung.

Ist  $\mathfrak{G}$  eine Gruppe, so heisst die Teilmenge  $M \subset G$  ein Erzeugendensystem von  $\mathfrak{G}$ , wenn jedes Element von  $\mathfrak{G}$  als endliches Produkt von Elementen aus  $M$  und deren Inversen darstellbar ist.

Der Komplex  $E$  aller Ebenenspiegelungen ist nun offenbar ein Erzeugendensystem für die Gruppe  $\mathfrak{R}$ <sup>9)</sup>. Da jedes  $\Omega \in \mathfrak{R}$  sogar als Produkt von höchstens 4 Elementen aus  $E$  darstellbar ist, heisst  $\mathfrak{R}$  4spiegelig über  $E$ .

Geht man von der Menge  $G$  aller Geradenspiegelungen aus, so lässt sich auch hieraus eine Gruppe erzeugen, indem man alle endlichen Produkte aus Geradenspiegelungen betrachtet. Aus unseren Untersuchungen entnehmen wir sofort, dass hieraus die Gruppe  $\mathfrak{R}^+$  hervorgeht. Der Komplex  $G$  ist ein Erzeugendensystem für die Gruppe  $\mathfrak{R}^+$  und  $\mathfrak{R}^+$  ist über  $G$  2spiegelig.

Auch der Komplex  $P$  aller Punktspiegelungen erzeugt eine Gruppe  $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{R}$ . Um  $\mathfrak{S}$  überblicken zu können, benötigen wir den

**Satz 14:** *Das Produkt aus 3 Punktspiegelungen ist stets wieder eine Punktspiegelung.*

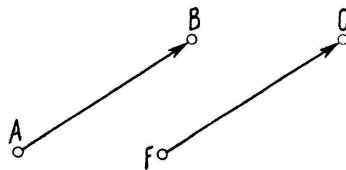
Es sei  $\Omega = \Sigma_A \circ \Sigma_B \circ \Sigma_C$ . Das Produkt aus zwei Punktspiegelungen ist stets eine Translation; insbesondere ist  $\Sigma_A \circ \Sigma_B$  die Translation mit dem Vektor  $\mathbf{v} = 2\mathbf{AB}$ . Wir wählen nun den Punkt  $F$  so, dass

$$\mathbf{AB} = \mathbf{FC} \quad \text{bzw.} \quad \Sigma_A \circ \Sigma_B = \Sigma_F \circ \Sigma_C$$

wird. Dann folgt

$$\Omega = \Sigma_A \circ \Sigma_B \circ \Sigma_C = \Sigma_F \circ \Sigma_C \circ \Sigma_C = \Sigma_F$$

womit der Satz 14 bewiesen ist.

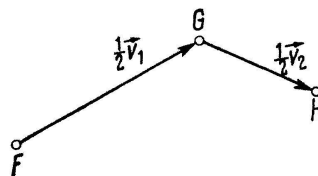


Figur 14

Ein Produkt aus einer ungeraden Anzahl von Punktspiegelungen stellt mithin immer eine Punktspiegelung dar. Es besteht daher der

**Satz 15:** *Die Gruppe  $\mathfrak{S}$ , die aus den Punktspiegelungen erzeugt wird, besteht aus den Punktspiegelungen und den Translationen.*

$\mathfrak{S}$  ist über dem Komplex  $P$  2spiegelig.



Figur 15

In der Gruppe  $\mathfrak{R}$  kommen drei verschiedene Typen von involutorischen Abbildungen vor, nämlich die Ebenenspiegelungen, die Geradenspiegelungen und die

<sup>9)</sup> In diesem besondern Beispiel besteht die Beziehung  $\Omega^{-1} \circ E \circ \Omega = E$  für alle  $\Omega \in \mathfrak{R}$ . Man spricht in diesem Falle von einem invarianten Erzeugendensystem der Gruppe  $\mathfrak{R}$ .

Punktspiegelungen. Der Komplex  $E$  erzeugt die volle Gruppe  $\mathfrak{R}$ ,  $G$  und  $P$  erzeugen die beiden Untergruppen  $\mathfrak{R}^+$  und  $\mathfrak{S}$ . Man kann auch sämtliche involutorische Elemente  $J = E \cup G \cup P$  als Erzeugendensystem von  $\mathfrak{R}$  benutzen. Dies vereinfacht den gruppentheoretischen Aufbau von  $\mathfrak{R}$  ganz wesentlich, indem jetzt alle Kongruenzabbildungen 2spiegelig werden. Bei den Schraubungen genügt der Hinweis auf den Satz 6. Für die Schubspiegelungen und Drehspiegelungen haben wir im Abschnitt 4 gezeigt, dass diese stets auf die Form  $\Sigma_g \circ \Sigma_\delta$  gebracht werden können.  $\mathfrak{R}$  ist über dem Komplex  $J$  tatsächlich 2spiegelig.

**Satz 16:** *Die Translationen bilden eine kommutative Untergruppe  $\mathfrak{T} \subset \mathfrak{R}^+$ .*

Die Gruppeneigenschaft der Translationen ist leicht zu verifizieren und wir wollen uns hier auf den Nachweis der Kommutativität beschränken. Hierzu betrachten wir die beiden Translationen  $T_1$  und  $T_2$  mit den Vektoren  $v_1$  und  $v_2$ . Die drei Punkte  $F$ ,  $G$  und  $H$  sind so gewählt, dass

$$T_1 = \Sigma_F \circ \Sigma_G; \quad T_2 = \Sigma_G \circ \Sigma_H$$

Es ist dann

$$T_1 \circ T_2 = \Sigma_F \circ \Sigma_G \circ \Sigma_G \circ \Sigma_H = \Sigma_F \circ \Sigma_H$$

und dies ist wiederum eine Translation. Weiter gilt nun

$$T_2 \circ T_1 = \Sigma_G \circ \Sigma_H \circ \Sigma_F \circ \Sigma_G = \Sigma_F \circ \Sigma_H \circ \Sigma_G \circ \Sigma_G = \Sigma_F \circ \Sigma_H = T_1 \circ T_2$$

Die letzte Umformung stützt sich auf den Satz 14; da das Produkt aus drei Punktspiegelungen eine involutorische Abbildung beschreibt, kann man die Reihenfolge der drei Faktoren umkehren.

## 6. Spiegelungszyklen

Der Aufbau der Gruppe  $\mathfrak{R}$  aus ihren involutorischen Elementen ist besonders durchsichtig. Die tiefere Bedeutung der Spiegelungen in  $\mathfrak{R}$  liegt aber noch bei einer anderen Eigenschaft. Wir haben in  $\mathfrak{R}$  drei Arten von Spiegelungen festgestellt; es sind dies die *Ebenenspiegelungen*  $\Sigma_\alpha, \Sigma_\beta, \Sigma_\gamma, \dots$ , die *Geradenspiegelungen*  $\Sigma_a, \Sigma_b, \Sigma_c, \dots$  und die *Punktspiegelungen*  $\Sigma_A, \Sigma_B, \Sigma_C, \dots$ . Diese einfachen Abbildungen stehen in enger Beziehung zu den geometrischen Grundobjekten des Raumes, nämlich den *Ebenen*, *Geraden* und *Punkten*. Jedem Grundobjekt kann auf naheliegende Weise umkehrbar eindeutig eine involutorische Kongruenz zugeordnet werden:

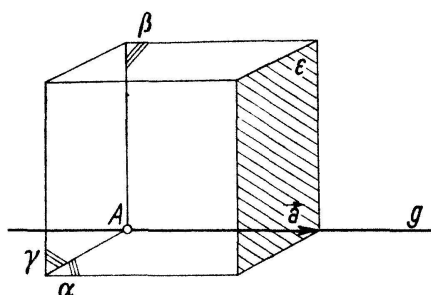
$$\alpha \leftrightarrow \Sigma_\alpha; \quad a \leftrightarrow \Sigma_a; \quad A \leftrightarrow \Sigma_A$$

Geometrischen Lagebeziehungen zwischen Ebenen, Geraden und Punkten entsprechen dabei bestimmte Relationen zwischen den zugeordneten Spiegelungen, wodurch geometrische Aussagen in die Sprache der Algebra übersetzt werden können. Die Spiegelungen ermöglichen eine Abbildung gewisser Lagebeziehungen in die Gruppenstruktur. Ein Beispiel soll diesen Sachverhalt illustrieren.

Wir gehen von einem Punkt  $A$  und einer Ebene  $\varepsilon$  aus.  $g$  sei die senkrechte Gerade zu  $\varepsilon$  durch  $A$ . Aus der Fig. 16 lesen wir sofort die folgende Beziehung heraus

$$\Omega = \Sigma_A \circ \Sigma_\varepsilon = \Sigma_\alpha \circ \Sigma_\beta \circ \Sigma_\gamma \circ \Sigma_\varepsilon = \Sigma_g \circ \Sigma_\gamma \circ \Sigma_\varepsilon = \Sigma_g \circ T$$

$T$  ist die Translation mit dem Vektor  $\mathbf{v} = 2\mathbf{a}$ .  $\Omega$  ist somit eine Schraubung; sie hat die Achse  $g$ , den Vektor  $\mathbf{v}$  und ihr Drehwinkel ist  $\vartheta = \pi$ .



Figur 16

Wir denken uns jetzt noch einen weiteren Punkt  $B$  gegeben. Die beiden Schraubungen  $\Sigma_A \circ \Sigma_\varepsilon$  und  $\Sigma_B \circ \Sigma_\varepsilon$  sind genau dann zueinander inverse Abbildungen, wenn  $A$  und  $B$  in bezug auf  $\varepsilon$  symmetrisch liegen – oder anders ausgedrückt – wenn  $\varepsilon$  die Mittelnormalebene der Strecke  $AB$  ist. Die Beziehung

$$\Sigma_A \circ \Sigma_\varepsilon \circ \Sigma_B \circ \Sigma_\varepsilon = I$$

kann daher als Übersetzung der eben genannten Lagebeziehung in die Sprache der Algebra betrachtet werden:

$$\Sigma_A \circ \Sigma_\varepsilon \circ \Sigma_B \circ \Sigma_\varepsilon = I \iff \varepsilon \text{ ist Mittelnormalebene von } AB$$

Wie wir dies im vorliegenden Beispiel getan haben, lässt sich die Relation in  $\mathfrak{R}$  stets auf die Form eines Spiegelungsproduktes bringen, welches die Identität darstellt. Nach einem Vorschlag von G. THOMSEN spricht man dann von einem Spiegelungszyklus [5].

Wir lassen ohne Beweis noch einige weitere Beispiele von Spiegelungszyklen mit ihren zugeordneten geometrischen Figuren folgen.

$$\begin{aligned} (\Sigma_A \circ \Sigma_g)^2 = I & \iff A \text{ und } g \text{ inzident;} \\ (\Sigma_A \circ \Sigma_\varepsilon)^2 = I & \iff A \text{ und } \varepsilon \text{ inzident;} \\ (\Sigma_g \circ \Sigma_\varepsilon)^2 = I & \iff g \text{ und } \varepsilon \text{ inzident oder } g \text{ ist senkrecht zu } \varepsilon; \\ \Sigma_A \circ \Sigma_B \circ \Sigma_C \circ \Sigma_B = I & \iff B \text{ ist Mittelpunkt der Strecke } AC; \\ \Sigma_f \circ \Sigma_g \circ \Sigma_h = I & \iff \text{die Geraden } f, g, h \text{ gehen durch denselben Punkt und sind} \\ & \text{paarweise senkrecht;} \\ (\Sigma_\alpha \circ \Sigma_\beta \circ \Sigma_\gamma)^2 = I & \iff \text{die Ebenen } \alpha, \beta, \gamma \text{ liegen im Büschel (parallel oder inzident} \\ & \text{mit einer Geraden) oder sind paarweise senkrecht;} \\ \Sigma_\alpha \circ \Sigma_\varepsilon \circ \Sigma_\beta \circ \Sigma_\varepsilon = I & \iff \varepsilon \text{ ist winkelhalbierende Ebene oder Mittelparallelebene von} \\ & \alpha \text{ und } \beta. \end{aligned}$$

Es gibt auch Spiegelungszyklen, denen keine geometrische Aussagekraft inneohnt. So besteht zum Beispiel der Zyklus

$$(\Sigma_A \circ \Sigma_B \circ \Sigma_C)^2 = I$$

auf Grund von Satz 14 für jedes beliebige Punktetripel  $A, B, C$ .

Die Spiegelungszyklen erlauben eine analytische Geometrie in der Gruppenstruktur; man kann geometrische Sätze durch Rechnen mit Spiegelungen beweisen. Diesbezüglich sei auf [2], [3] und [5] verwiesen, wo dieser Gedanke für die ebene Geometrie entwickelt ist. Für die räumliche Geometrie liegen erst einige wenige Ansätze vor.

## 7. Kinematische Anwendungen

Wir lassen jetzt noch 3 Anwendungsbeispiele folgen, die für die Eleganz spiegelerungsgeometrischer Methoden zeugen mögen.

I. Wir beweisen zuerst den

**Satz 17:** Die resultierende Abbildung aus zwei Drehungen  $\Delta_1$  und  $\Delta_2$ , deren Achsen sich im Punkt  $F$  schneiden, ist wiederum eine Drehung mit einer Achse durch  $F$ .

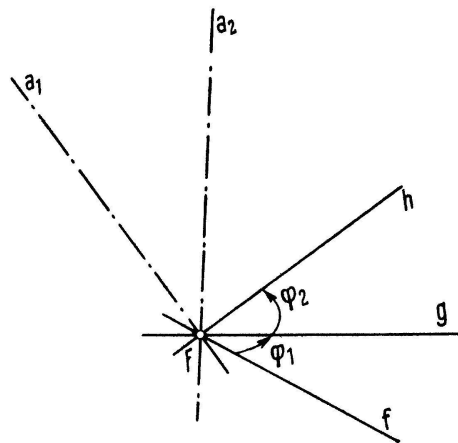
Wir bezeichnen die Achsen von  $\Delta_1$  und  $\Delta_2$  mit  $a_1$  und  $a_2$ . Zum Beweis zerlegen wir die beiden Drehungen je in ein Produkt aus zwei Geradenspiegelungen. Hierbei wählen wir die Geradenspiegelungen so, dass der zweite Faktor von  $\Delta_1$  mit dem ersten Faktor von  $\Delta_2$  übereinstimmt:

$$\Delta_1 = \Sigma_f \circ \Sigma_g; \quad \Delta_2 = \Sigma_g \circ \Sigma_h$$

$g$  ist dann das gemeinsame Lot auf die beiden Achsen  $a_1$  und  $a_2$  durch den Punkt  $F$  (Fig. 17). Diese besondere Darstellung, die für die Spiegelungsgeometrie typisch ist, führt nun auf

$$\Delta_1 \circ \Delta_2 = (\Sigma_f \circ \Sigma_g) \circ (\Sigma_g \circ \Sigma_h) = \Sigma_f \circ \Sigma_h$$

und dies ist offenbar eine Drehung, deren Achse durch  $F$  geht.



Figur 17

II. Als zweites Beispiel beweisen wir den

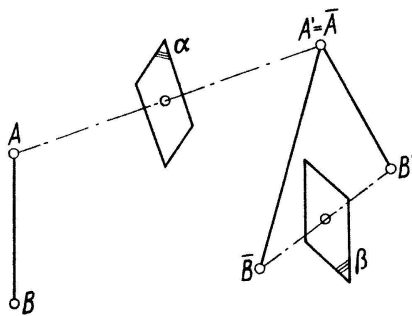
**Satz 18:** Zwei gleichlange Strecken  $AB$  und  $\bar{A}\bar{B}$  bestimmen genau eine Drehung (evtl. Translation)  $\Delta$ , bei der die eine Strecke in die andere übergeht.

Zum Beweis führen wir die Spiegelung  $\Sigma_\alpha$  ein, die  $\bar{A}$  in  $A$  überführt; der Punkt  $B$  gehe hiedurch an die Stelle  $B'$ . Daneben betrachten wir noch die Spiegelung  $\Sigma_\beta$ , die  $B'$  nach  $\bar{B}$  bringt.

Die Kongruenz  $\Omega = \Sigma_\alpha \circ \Sigma_\beta$  befördert nun  $A$  nach  $\bar{A}$  und  $B$  nach  $\bar{B}$ ; sie ist im allgemeinen eine Drehung, in speziellen Fällen eine Translation. Achse und Dreh-

winkel bzw. der Translationsvektor lassen sich aus der Lage von  $\alpha$  und  $\beta$  konstruktiv leicht gewinnen.

Die Eindeutigkeit der Drehung schliesst man aus der Tatsache, dass die Drehachse die Schnittgerade der Mittelnormalebene von  $A$  und  $\bar{A}$  sowie von  $B$  und  $\bar{B}$  sein muss; diese Gerade ist aber durch die gegebene Figur eindeutig bestimmt. Es sei noch bemerkt, dass man allein aus der Existenz dieser Schnittgeraden nicht ohne weiteres auf eine Drehung schliessen kann. Auf die Überlegung mit den beiden Spiegelungen  $\Sigma_\alpha$  und  $\Sigma_\beta$  kann nicht verzichtet werden.



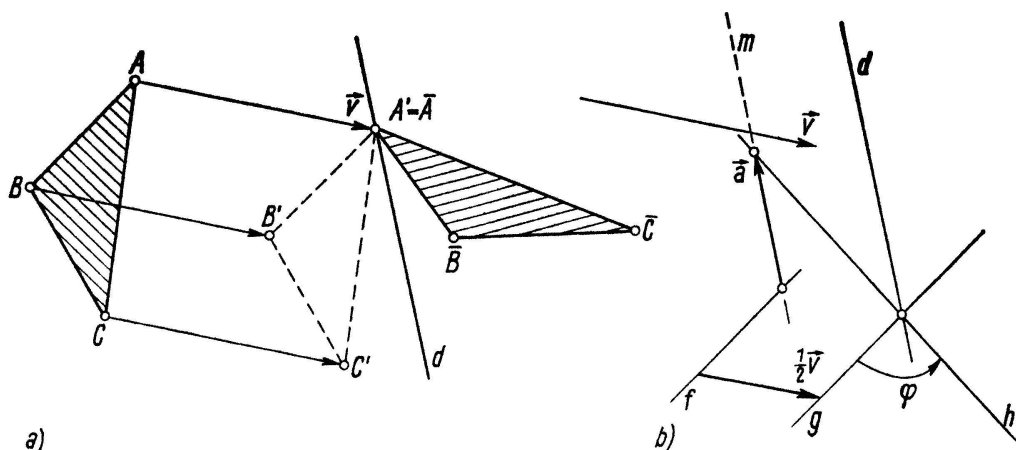
Figur 18

III. Konstruktion von Achse, Winkel und Vektor einer Schraubung, die das Dreieck  $ABC$  in ein seitengleiches Dreieck  $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$  überführt.

Wir können beim Beweis von Satz 11 anknüpfen. Dort wurde gezeigt, dass die vorliegende Schraubung als Produkt von 4 Ebenenspiegelungen geschrieben werden kann:

$$\Omega' = \Sigma_\alpha \circ \Sigma_\beta \circ \Sigma_\gamma \circ \Sigma_\epsilon$$

Die beiden Teile  $\Sigma_\alpha \circ \Sigma_\beta$  und  $\Sigma_\gamma \circ \Sigma_\epsilon$  repräsentieren je eine Drehung oder Translation, die ihrerseits als Produkte von zwei Geradenspiegelungen notiert werden können. Die beiden speziellen Schraubungen lassen sich dann gemäss Fig. 7 vereinigen, wobei die wesentlichen Bestimmungsstücke von  $\Omega'$  konstruktiv sofort gewonnen werden können. Etwas rascher führt der folgende Weg zum Ziel. Wir bringen zuerst durch eine Translation  $T$  den Punkt  $A$  an die Stelle  $\bar{A}$  (Fig. 19b). Eine anschliessende Drehung  $\Delta$  mit dem Fixpunkt  $\bar{A}$  (die Achse  $d$  dieser Drehung geht durch  $\bar{A}$ ) bringt



Figur 19

dann das Dreieck  $A'B'C'$  in die verlangte Endlage. Es sei nun  $g$  eine Gerade, die  $d$  schneidet und die zugleich auf  $d$  und auf  $v$  senkrecht steht. Man kann dann leicht zwei weitere Geraden  $f$  und  $h$  finden, so dass

$$T = \Sigma_f \circ \Sigma_g; \quad \Delta = \Sigma_g \circ \Sigma_h \Rightarrow \Omega' = T \circ \Delta = \Sigma_f \circ \Sigma_h$$

Die Minimaltransversale von  $f$  und  $h$  ist die gesuchte Schraubachse von  $\Omega'$ , der Minimalabstand liefert den halben Verschiebungsvektor und der Winkel  $\varphi$  zwischen  $f$  und  $h$  ist der halbe Schraubwinkel. M. JEGER, Luzern/Zürich

## LITERATUR

- [1] BACHMANN, F., *Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. 96 (Berlin, Göttingen, Heidelberg 1959).
- [2] GUSE, S., *Beweise elementargeometrischer Sätze durch Spiegelungsrechnen* (Diss. Kiel, 1952).
- [3] JEGER, M., *Über die gruppenalgebraische Struktur der Elementargeometrie*, *El. Math.* 19, Nr. 1 und 2 (Basel 1962).
- [4] NASTOLD, H. J. und TH., *Begründung der euklidischen Geometrie mit Hilfe von Abbildungen*, Schriftenreihe des mathematischen Institutes der Universität Münster (1962).
- [5] THOMSEN, G., *Grundlagen der Elementargeometrie in gruppenalgebraischer Behandlung*, Hamburger math. Einzelschriften, Heft 16 (Hamburg 1933).
- [6] WIENER, H., *Die Zusammensetzung zweier endlicher Schraubungen zu einer einzigen; Zur Theorie der Umwendungen; Über die aus zwei Spiegelungen zusammengesetzten Verwandtschaften; Über geometrische Analysen; Über Gruppen vertauschbarer zwei-spiegeliger Verwandtschaften*, *Ber. Verh. kgl. Sächs. Ges. Wiss. Leipzig, math.-naturw. Klasse* 42 (1890), 43 (1891), 45 (1893).

## Aufgaben

**Aufgabe 546.** Es sei  $M(n)$  die Ordnung der grössten zyklischen Untergruppe der symmetrischen Gruppe  $\mathfrak{S}_n$ . Man beweise:

Für fast alle  $n$  gilt

$$M(n) \geq e^{\sqrt{n \log n}}.$$

*Anmerkung:* Es ist zu vermuten, dass auch

$$M(n) \leq e^{(1+\varepsilon)\sqrt{n \log n}}$$

für fast alle  $n$  gilt.

O. HERRMANN, Heidelberg

*Lösung des Aufgabenstellers:* Es sei  $k$  so gewählt, dass

$$\sum_{\nu=1}^k p_{\nu} \leq n < \sum_{\nu=1}^{k+1} p_{\nu}$$

gilt, wobei  $p_1 = 2, p_2 = 3, \dots$ , die Primzahlfolge ist. Dann gibt es  $k$  paarweise fremde Teilmengen der Menge  $\{1, 2, \dots, n\}$ , die genau  $p_1, p_2, \dots, p_k$  Zahlen enthalten. Das bedeutet, dass es  $k$  paarweise vertauschbare Permutationen mit den teilerfremden Ordnungen  $p_1, p_2, \dots, p_k$  gibt. Deren Produkt ist eine Permutation der Ordnung  $\prod p_{\nu}$ . Damit ist

$$M(n) \geq \prod_{\nu=1}^k p_{\nu} = e^{\theta(p_k)}.$$