Aufgaben

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **23 (1968)**

Heft 2

PDF erstellt am: **12.07.2024**

dann das Dreieck $A'B'C'$ in die verlangte Endlage. Es sei nun g eine Gerade, die d schneidet und die zugleich auf d und auf $\boldsymbol{v}$ senkrecht steht. Man kann dann leicht zwei weitere Geraden f und h finden, so dass

$$T = \Sigma_f \circ \Sigma_g ; \quad \Delta = \Sigma_g \circ \Sigma_h \Rightarrow \Omega' = T \circ \Delta = \Sigma_f \circ \Sigma_h$$

Die Minimaltransversale von f und h ist die gesuchte Schraubachse von Ω', der Minimalabstand liefert den halben Verschiebungsvektor und der Winkel φ zwischen f und h ist der halbe Schraubwinkel. M. JEGER, Luzern/Zürich

LITERATUR

[1] BACHMANN, F., *Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. 96 (Berlin, Göttingen, Heidelberg 1959).
[2] GUSE, S., *Beweise elementargeometrischer Sätze durch Spiegelungsrechnen* (Diss. Kiel, 1952).
[3] JEGER, M., *Über die gruppenalgebraische Struktur der Elementargeometrie*, El. Math. *19*, Nr. 1 und 2 (Basel 1962).
[4] NASTOLD, H. J. und TH., *Begründung der euklidischen Geometrie mit Hilfe von Abbildungen*, Schriftenreihe des mathematischen Institutes der Universität Münster (1962).
[5] THOMSEN, G., *Grundlagen der Elementargeometrie in gruppenalgebraischer Behandlung*, Hamburger math. Einzelschriften, Heft 16 (Hamburg 1933).
[6] WIENER, H., *Die Zusammensetzung zweier endlicher Schraubungen zu einer einzigen; Zur Theorie der Umwendungen; Über die aus zwei Spiegelungen zusammengesetzten Verwandschaften; Über geometrische Analysen; Über Gruppen vertauschbarer zweispiegeliger Verwandtschaften*, Ber. Verh. kgl. Sächs. Ges. Wiss. Leipzig, math.-naturw. Klasse *42* (1890), *43* (1891), *45* (1893).

Aufgaben

Aufgabe 546. Es sei $M(n)$ die Ordnung der grössten zyklischen Untergruppe der symmetrischen Gruppe $\mathfrak{S}_n$. Man beweise:
Für fast alle n gilt

$$M(n) \geqq e^{\sqrt{n \log n}} .$$

Anmerkung: Es ist zu vermuten, dass auch

$$M(n) \leqq e^{(1+\varepsilon)\sqrt{n \log n}}$$

für fast alle n gilt. O. HERRMANN, Heidelberg

Lösung des Aufgabenstellers: Es sei k so gewählt, dass

$$\sum_{\nu=1}^{k} p_\nu \leqq n < \sum_{\nu=1}^{k+1} p_\nu$$

gilt, wobei $p_1 = 2, p_2 = 3, \ldots$, die Primzahlfolge ist. Dann gibt es k paarweise fremde Teilmengen der Menge $\{1, 2, \ldots, n\}$, die genau $p_1, p_2, \ldots, p_k$ Zahlen enthalten. Das bedeutet, dass es k paarweise vertauschbare Permutationen mit den teilerfremden Ordnungen $p_1, p_2, \ldots, p_k$ gibt. Deren Produkt ist eine Permutation der Ordnung $\Pi\, p_\nu$. Damit ist

$$M(n) \geqq \prod_{\nu=1}^{k} p_\nu = e^{\vartheta(p_k)} .$$

Somit ist die Behauptung mit

$$\vartheta(p_k) \geqq \sqrt{n \log n}$$

äquivalent. Aus den bekannten Beziehungen

$$\sum_{p \leqq x} p = x^2/(2 \log x) + O(x^2/\log^2 x)$$

und

$$p_{k+1} = O(p_k) = O(p_k^2/\log^2 p_k)$$

folgt

$$n = \frac{1}{2} p_k^2 \frac{1}{\log p_k} \left(1 + O\left(\frac{1}{\log p_k}\right)\right)$$

und

$$\log n = 2 \log p_k - \log \log p_k + O(1).$$

Damit ist

$$n \log n = p_k^2 \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{\log \log p_k}{\log p_k} + O\left(\frac{1}{\log p_k}\right)\right).$$

Wegen

$$\vartheta(p_k) = p_k (1 + O(1/\log p_k))$$

ist die Behauptung somit evident.

A. Bager (Hjørring) und M. G. Beumer (Delft) wiesen darauf hin, dass das Problem in E. Landau, *Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen*, I, § 61 (Chelsea-Ausgabe 1953) vollständig gelöst ist. Landau bewies, dass bei festem ε und $n \geqq n_0(\varepsilon)$ gilt

$$(1 - \varepsilon) \sqrt{n \log n} \leqq \log M(n) \leqq (1 + \varepsilon) \sqrt{n \log n}.$$

Die oben bewiesene Abschätzung nach unten ist etwas schärfer. Landau hat für $n \to \infty$ auch $\log M(n) \sim \sqrt{n \log n}$ bewiesen. Nach S. M. Shah (Journ. Indian Math. Soc. [2] *3*, 316 (1938/39) gilt für $n \to \infty$

$$\log M(n) = \sqrt{n \log n} + (\sqrt{n} \log \log n)/(2 \sqrt{\log n}) + O(\sqrt{n/\log n}).$$

Aufgabe 547. In einer Ebene sind zwei Kreise K_1, K_2 gegeben, die sich von aussen berühren. Welches ist der geometrische Ort des Punktes der Ebene, durch welchen zwei gleiche, nicht dem Büschel (K_1, K_2) angehörende Kreise gehen, von denen jeder K_1 und K_2 berührt? C. Bindschedler, Küsnacht

Lösung des Aufgabenstellers: Ein «trivialer» Bestandteil des Ortes ist der Teil der Zentralen von K_1 und K_2, der ausserhalb dieser Kreise liegt. Für einen nicht auf dieser Zentralen liegenden Ortspunkt P berührt der eine der beiden gleichen Kreise das Paar K_1, K_2 einschliessend, der andere von aussen. Eine Inversion, deren Zentrum der Berührungspunkt J von K_1 und K_2 ist, führt diese Kreise in zwei Parallelen K_1', K_2' über, zwischen denen J liegt. Die Bildkreise der gleichen Kreise C_1, C_2 durch P sind zwei Berührungskreise von K_1', K_2', die sich in P', Q' schneiden. J liegt innerhalb des einen, aber ausserhalb des andern dieser Kreise C_1', C_2'. Der Kreis durch P', Q', J besitzt als Bild der Symmetrieachse von C_1, C_2 die Strecke $\overline{P'Q'}$ zum Durchmesser. Daher ist $\sphericalangle\, P' J Q' = 90°$. Der symmetrische Punkt zu J bezüglich der Mittelparallelen des Streifens K_1', K_2' sei $\bar{J}$. Die Winkel $P' J \bar{J}$ und $P' \bar{J} J$ unterscheiden sich um einen rechten. P' ist also Erzeugnis zweier kongruenten Strahlenbüschel und sein Ort der innerhalb des Streifens liegende Teil einer gleichseitigen Hyperbel mit den Scheiteln J, $\bar{J}$. Der entsprechende Ort von P ist also der ausserhalb von K_1, K_2 liegende Teil einer geraden Strophoide mit dem Doppelpunkt J und dem äusseren Ähnlichkeitspunkt von K_1 und K_2 als Scheitel. Die Grenzpunkte dieses Kurventeils sind die Berührungspunkte von K_1 und K_2 mit ihren gemeinsamen äusseren Tangenten.

W. Jänichen (Berlin) und E. Widmer (Biel) lösten die Aufgabe mit analytischer Geometrie. Ist die Zentrale von K_1, K_2 die x-Achse und die gemeinsame Tangente die y-Achse, so ist $y^2 = x^2 (s + x)(s - x)^{-1}$ mit $s = 2 r_1 r_2/(r_2 - r_1)$ die Gleichung der Strophoide, wobei r_i $(i = 1, 2)$ der Radius von K_i ist.

Aufgabe 548. Gegeben ist ein Kreis $\varkappa$ mit dem Radius c, der von einer Schar von Ellipsen in einem Punkt A oskuliert wird. A ist für jede dieser oskulierenden Ellipsen ein Scheitelpunkt. Der Kreisdurchmesser durch A liegt folglich auf der allen Ellipsen der Schar gemeinsamen Achse.

a) Welches ist der geometrische Ort aller nicht auf der gemeinsamen Achse liegenden Scheitelpunkte dieser Ellipsenschar?

b) Auf was für einer Kurve liegen die zu diesen Scheitelpunkten der Ellipse gehörigen Krümmungsmittelpunkte?

c) Welche gemeinsame geometrische Bedeutung hat der Kreisradius c für diese beiden geometrischen Örter?

d) Welches ist der geometrische Ort der Brennpunkte jener Ellipsen aus der Schar, für die A ein Nebenscheitel ist?

e) Für jene Ellipsen aus der Schar, welche A als Hauptscheitel besitzen, liegen die zugehörigen Brennpunkte X_1 und X_2 auf dem Durchmesser von $\varkappa$ durch A. Welche geometrische Verwandtschaft besteht zwischen den in vereinigter Lage befindlichen Punktreihen $\{X_1\}$ und $\{X_2\}$? E. Schröder, Dresden

Lösung des Aufgabenstellers: A sei der Ursprung eines kartesischen Normalkoordinatensystems. Die y-Achse berühre in A den Kreis $\varkappa$.

Auf der y-Achse werde ein Punkt T beliebig angenommen und mit dem Mittelpunkt M von $\varkappa$ verbunden. Das Lot von A auf $M\,T$ schneidet die Normale auf der y-Achse durch T in P. P ist der Ort für einen gesuchten Scheitelpunkt aus der Ellipsenschar.

Die Normale durch P auf $T\,P$ schneidet die Gerade $T\,M$ in Q. Q ist der Mittelpunkt des zu P gehörigen Scheitelkrümmungskreises.

Setzt man $\overline{A\,T} = t$, so ergeben sich für die geometrischen Örter folgende Parameterdarstellungen:

$$\{P\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad x = \frac{t^2}{c}, \quad y = t$$

$$\{Q\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad x = \frac{t^2}{c}, \quad y = -\frac{t^3}{c^2} + t.$$

$\{P\}$ ist eine Parabel mit A als Scheitelpunkt, der y-Achse als Scheiteltangente und $\varrho = c/2$ als Radius für den Scheitelkrümmungskreis.

$\{Q\}$ ist eine Tschirnhaus-Kubik mit A als Scheitelpunkt, der y-Achse als Scheiteltangente und $\varrho = c/2$ als Radius für den Scheitelkrümmungskreis.

M ist ein Doppelpunkt dieser Kubik. Die Doppelpunktstangenten stehen aufeinander normal.

Der geometrische Ort der Brennpunkte F jener Ellipsen, die A als Nebenscheitel besitzen, wird durch folgende Parameterdarstellung beschrieben:

$$x = \frac{t^2}{c}, \quad y = t\sqrt{1 - \frac{t^2}{c^2}} \quad \text{mit } |t| \leqq c.$$

Eliminiert man aus dieser Darstellung den Parameter t, so erhält man die Gleichung eines Kreises in kartesischen Koordinaten:

$$\left(x - \frac{c}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{c^2}{4}.$$

Dies ist zugleich die Gleichung des Scheitelkrümmungskreises von Parabel und Tschirnhaus-Kubik.

Für jene Ellipsen, die A als Hauptscheitel besitzen, gilt:

$$\overline{A\,X_1} = \frac{t^2}{c} - t\sqrt{\frac{t^2}{c^2} - 1} \quad \text{und} \quad \overline{A\,X_2} = \frac{t^2}{c} + t\sqrt{\frac{t^2}{c^2} - 1} \quad \text{mit } |t| \geqq c.$$

Setzt man $\overline{A\,X_1} = X_1$ und $\overline{A\,X_2} = X_2$, so ergibt sich nach Elimination von t als Gleichung für die Punktverwandtschaft

$$c(X_1 + X_2) = 2\,X_1\,X_2\,.$$

$\{X_1\}$ und $\{X_2\}$ bilden eine Punktinvolution auf dem Durchmesser von $\varkappa$ durch A. $U = 0$ und $V = c$ sind die Fixpunkte dieser Involution.

Weitere Lösungen sandten L. KIEFFER (Luxemburg), E. WIDMER (Biel), R. WHITEHEAD (Hayle/Engl.).

Neue Aufgaben

Aufgabe 569. Gegeben sind ein Tetraeder $A_1 A_2 A_3 A_4$ mit den Seitenflächen α_1, α_2, α_3, α_4 und ein Tetraeder $B_1 B_2 B_3 B_4$ mit den Seitenflächen β_1, β_2, β_3, β_4. l_i ist die Senkrechte von A_i auf β_i, m_i die Senkrechte von B_i auf α_i ($i = 1, 2, 3, 4$). Man zeige: Wenn die Geraden l_i durch einen Punkt gehen, dann gehen auch die Geraden m_i durch einen Punkt.

O. BOTTEMA, Delft

Aufgabe 570. Démontrer qu'il existe une infinité de nombres naturels k pour lesquels il existe seulement un nombre fini > 0 de nombres triangulaires qui sont sommes de k nombres triangulaires consécutifs.

W. SIERPIŃSKI, Varsovie

Aufgabe 571. 1. Let F denote the finite field of odd order q. Show that if $b \in F$ but not a square in F then

$$\prod_{a \in F} [(x + a)^2 - b] = (x^q - x)^2 - 4\,b\,.$$

2. More generally if F is a finite field of order q and $n \mid q - 1$, evaluate the product $\prod_{a \in F} [(x + a)^n - b]$, where $b \in F$.

L. CARLITZ, Duke University, USA

Aufgabe 572. Wenn in einem Dreieck die Ecktransversalen die Gegenseiten im Verhältnis der x-ten Potenzen der anliegenden Seiten teilen, dann schneiden sie sich in einem Punkt, und dessen Abstände von den Seiten sind dann zu deren $(x - 1)$-ten Potenzen proportional. Dabei kann x eine beliebige reelle Zahl sein.

Man beweise die Richtigkeit dieser Aussage und ihrer Umkehrung.

O. REUTTER, Ochsenhausen

Bericht

12. Mathematikgeschichtliches Kolloquium im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach (Schwarzwald), 10.-15. September 1967

Das dank der Initiative und unermüdlichen Arbeit von M. BARNER, dem geschäftsführenden Direktor des Instituts, von der Volkswagenstiftung errichtete Gästehaus – die feierliche Einweihung fand unter Beteiligung von rund 130 Persönlichkeiten des wissenschaftlichen und öffentlichen Lebens am 16. Oktober 1967 statt – stand schon für unsere Tagung zur Verfügung und bot den Teilnehmern die Unterbringung in angenehm eingerichteten Einzelzimmern, die den Aufenthalt in der reizvollen landschaftlichen Umgebung besonders erfreulich machten. An der auch vom Wetter begünstigten Zusammenkunft waren diesmal mehrere jüngere Mathematikhistoriker beteiligt, die von ihren eigenen Forschungen berichten konnten und auch an den wie immer in freundschaftlicher Atmosphäre geführten Diskussionen lebhaften Anteil nahmen.

Die Beiträge über die Mathematik der alten Griechen wurden eingeleitet durch A. SZABÓ, Budapest, der in seiner temperamentvollen Art aus einem zum Druck vorgesehenen Buchmanuskript auf Grund terminologischer Untersuchungen seine Ansicht über die Entwicklung des Beweisverfahrens in der griechischen Mathematik in Wieder-