

# Ungelöste Probleme

Objektyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **23 (1968)**

Heft 4

PDF erstellt am: **12.07.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

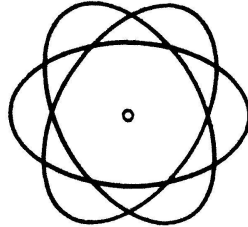
Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## Ungelöste Probleme

*Nr. 50.* Drei kongruente zentralsymmetrische Eiliniien der Ebene, die sich in konzentrischer Lage befinden, haben im allgemeinen keinen Punkt gemeinsam. Man vergleiche hierzu das mit der Figur angedeutete Beispiel.



Es erhebt sich hier die naheliegende Frage, was sich bezüglich der analogen Sachlage für Eiflächen im Raum sagen lässt. Merkwürdigerweise scheint die Abklärung schwieriger zu sein, als man zunächst anzunehmen geneigt ist. Man wird zwar eher vermuten, dass drei Eiflächen unter den entsprechenden gleichlautenden Bedingungen sich nicht zu meiden vermögen und also stets gemeinsame Punkte aufweisen. Jedoch ist unseres Wissens ein allgemeiner Nachweis hierfür noch nicht aufgestellt worden und andererseits ist auch kein Gegenbeispiel bekannt<sup>1)</sup>. Das hier nun vorgelegte ungelöste Problem lautet also:

*Ist es richtig, dass drei kongruente und zentralsymmetrische Eiflächen im gewöhnlichen Raum, die sich in konzentrischer Lage befinden, stets gemeinsame Punkte aufweisen müssen, oder gibt es solche Eiflächen mit leerem Durchschnitt?*

Wir geben nachfolgend noch einen Beweis dafür, dass die angedeutete Vermutung jedenfalls dann richtig ist, wenn noch zusätzlich verlangt wird, dass die Eiflächen rotationssymmetrisch sind.

Es sei  $z \in R$  ein fester Ursprung im Raume  $R$ , der Mittelpunkt der zentralsymmetrischen Rotationseifläche  $C$  ist. Mit  $S$  soll die Einheitskugeloberfläche um  $z$  bezeichnet werden. Wenn wir Punkte im  $R$  und ihre Ortsvektoren bezüglich  $z$  als Angriffsstelle mit den nämlichen Symbolen ausdrücken, so wird  $x \in S$  auch einen Einheitsvektor und damit auch eine Raumrichtung kennzeichnen. Bedeutet  $r = r(C, x)$  den Punkt von  $C$ , der auf dem von  $z$  auslaufenden Halbstrahl der Richtung  $x \in S$  liegt, so kann mit einer passenden in  $-1 \leq t \leq 1$  definierten Funktion  $f[t]$  wegen der Rotationssymmetrie von  $C$  offenbar  $r(C, x) = f[(a, x)]$  geschrieben werden, wenn  $a \in S$  die Richtung der Rotationsachse bezeichnet und  $(a, x)$  das Skalarprodukt anzeigt. Sind nun  $\rho$  und  $\sigma$  zwei kongruente Abbildungen von  $R$  auf sich, die  $z$  festlassen, so gibt es ein  $w \in S$  derart, dass  $(a, w) = (\rho a, w) = (\sigma a, w)$  ausfällt. Es resultiert nun mühelos, dass  $r(C, w) = r(\rho C, w) = r(\sigma C, w)$  wird, womit erwiesen ist, dass die drei kongruenten Eiflächen  $C, \rho C, \sigma C$  einen Punkt gemeinsam haben. Bei aufmerksamer Rückschau auf den vorgebrachten Beweis gewahrt man, dass weder die Konvexität noch die Zentralsymmetrie eine wesentliche Rolle spielt, was aber für die Formulierung des oben vorgetragenen allgemeinen Problems keineswegs gesagt werden kann.

H. HADWIGER

<sup>1)</sup> Die Frage wurde u. a. im Rahmen eines Kolloquiums über ungelöste Probleme der anschaulichen Geometrie im SS 1967 im Mathematischen Institut der Universität Bern erörtert.