Ungelöste Probleme

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

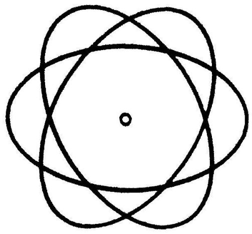
Band (Jahr): **23 (1968)**

Heft 4

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Ungelöste Probleme

Nr. 50. Drei kongruente zentralsymmetrische Eilinien der Ebene, die sich in konzentrischer Lage befinden, haben im allgemeinen keinen Punkt gemeinsam. Man vergleiche hierzu das mit der Figur angedeutete Beispiel.



Es erhebt sich hier die naheliegende Frage, was sich bezüglich der analogen Sachlage für Eiflächen im Raum sagen lässt. Merkwürdigerweise scheint die Abklärung schwieriger zu sein, als man zunächst anzunehmen geneigt ist. Man wird zwar eher vermuten, dass drei Eiflächen unter den entsprechenden gleichlautenden Bedingungen sich nicht zu meiden vermögen und also stets gemeinsame Punkte aufweisen. Jedoch ist unseres Wissens ein allgemeiner Nachweis hierfür noch nicht aufgestellt worden und andererseits ist auch kein Gegenbeispiel bekannt[1]). Das hier nun vorgelegte ungelöste Problem lautet also:

Ist es richtig, dass drei kongruente und zentralsymmetrische Eiflächen im gewöhnlichen Raum, die sich in konzentrischer Lage befinden, stets gemeinsame Punkte aufweisen müssen, oder gibt es solche Eiflächen mit leerem Durchschnitt?

Wir geben nachfolgend noch einen Beweis dafür, dass die angedeutete Vermutung jedenfalls dann richtig ist, wenn noch zusätzlich verlangt wird, dass die Eiflächen rotationssymmetrisch sind.

Es sei $z \in R$ ein fester Ursprung im Raume R, der Mittelpunkt der zentralsymmetrischen Rotationseifläche C ist. Mit S soll die Einheitskugelfläche um z bezeichnet werden. Wenn wir Punkte im R und ihre Ortsvektoren bezüglich z als Angriffsstelle mit den nämlichen Symbolen ausdrücken, so wird $x \in S$ auch einen Einheitsvektor und damit auch eine Raumrichtung kennzeichnen. Bedeutet $r = r(C, x)$ den Punkt von C, der auf dem von z auslaufenden Halbstrahl der Richtung $x \in S$ liegt, so kann mit einer passenden in $-1 \leqq t \leqq 1$ definierten Funktion $f[t]$ wegen der Rotationssymmetrie von C offenbar $r(C, x) = f[(a, x)]$ geschrieben werden, wenn $a \in S$ die Richtung der Rotationsachse bezeichnet und (a, x) das Skalarprodukt anzeigt. Sind nun ϱ und σ zwei kongruente Abbildungen von R auf sich, die z festlassen, so gibt es ein $w \in S$ derart, dass $(a, w) = (\varrho\, a, w) = (\sigma\, a, w)$ ausfällt. Es resultiert nun mühelos, dass $r(C, w) = r\,(\varrho\, C, w) = r\,(\sigma\, C, w)$ wird, womit erwiesen ist, dass die drei kongruenten Eiflächen $C, \varrho\, C, \sigma\, C$ einen Punkt gemeinsam haben. Bei aufmerksamer Rückschau auf den vorgebrachten Beweis gewahrt man, dass weder die Konvexität noch die Zentralsymmetrie eine wesentliche Rolle spielt, was aber für die Formulierung des oben vorgetragenen allgemeinen Problems keineswegs gesagt werden kann.

H. Hadwiger

[1]) Die Frage wurde u.a. im Rahmen eines Kolloquiums über ungelöste Probleme der anschaulichen Geometrie im SS 1967 im Mathematischen Institut der Universität Bern erörtert.