

# Aufgaben

Objektyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **23 (1968)**

Heft 5

PDF erstellt am: **05.07.2024**

## **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

## **Haftungsausschluss**

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

## Aufgaben

**Aufgabe 556.** Es sei  $\sum_{i=1}^n a_i = 0$ ,  $a_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) eine  $p$ -te Einheitswurzel und  $p$  eine Primzahl. Man zeige, dass jede  $p$ -te Einheitswurzel gleich oft als Summand in der obigen Summe vorkommt.

H. LÜNEBURG, Mainz

*Lösung:* Nach Voraussetzung ist jedes  $a_j$  eine der  $p$  Zahlen  $\exp(2\pi i k/p) = e_k$  ( $k = 0, \dots, p-1$ ), sodass wir schreiben können:

$$0 = \sum_{j=1}^u a_j = \sum_{k=0}^{p-1} n_k e_k \quad \text{mit} \quad \sum_{k=0}^{p-1} n_k = n, \quad (*)$$

wobei die  $n_k$  ganzzahlige nichtnegative Zahlen sind. Bekanntlich genügt  $e_1$  (sowie  $e_2, \dots, e_{p-1}$ , falls  $p > 2$ ) der über dem Integritätsbereich  $\Gamma$  der ganzzahligen Zahlen irreduziblen Gleichung  $x^{p-1} + \dots + 1 = 0$ . Beachtet man  $e_k = e_1^k$  ( $k = 0, \dots, p-1$ ), so genügt ferner  $e_1$  nach (\*) der Gleichung  $n_{p-1} x^{p-1} + \dots + n_0 = 0$  und aus der Identität

$$n_{p-1} x^{p-1} + \dots + n_0 - n_{p-1} (x^{p-1} + \dots + 1) = (n_{p-2} - n_{p-1}) x^{p-2} + \dots + (n_0 - n_{p-1})$$

folgt, dass  $e_1$  auch der Gleichung  $(n_{p-2} - n_{p-1}) x^{p-2} + \dots + (n_0 - n_{p-1}) = 0$  genügen müsste, woraus mit Rücksicht auf den Grad der irreduziblen Gleichung für  $e_1$  folgt:  $n_{p-1} = n_{p-2} = \dots = n_0$  bzw.  $p n_0 = n$  q.e.d. P. BUNDSCHUH, Freiburg-Littenweiler

Weitere Lösungen sandten: A. BRANDIS (Universität Heidelberg), D. Ž. DJOKOVIĆ (University of Waterloo, Canada), J. FEHÉR (Pécs/Ungarn), W. JÄNICHEN (Berlin-Zehlendorf).

**Aufgabe 557.**  $a, b, n$  seien natürliche Zahlen. Man zeige die Existenz einer absoluten Konstanten  $C_1$  mit folgender Eigenschaft: Ist  $n! (a! b!)^{-1}$  eine ganze Zahl, so ist

$$a + b < n + C_1 \log n.$$

Diese Aussage ist scharf in folgendem Sinn: Es gibt eine absolute Konstante  $C_2$ , so dass die Forderungen  $a + b > n + C_2 \log n$ ,  $n! (a! b!)^{-1} = \text{ganze Zahl}$  für unendlich viele  $n$  erfüllbar sind. P. ERDÖS

*Lösung des 1. Teils:* Wir können ohne weiteres  $a$  oder  $b$  als  $\geq 2$  voraussetzen. Wenden

wir dann die bekannte Formel  $m! = \prod_{p \leq m} p^{e_p}$ , wobei  $e_p = \sum_{k=1}^{\lambda_m} [m/p^k]$  und  $\lambda_m = [\log m / \log p]$  ist, auf  $n!$ ,  $a!$  und  $b!$  an, so erhalten wir aus der Bedingung der Ganzheit von  $n! (a! b!)^{-1}$  die Ungleichung

$$\sum_{k=1}^{\lambda_n} [n p^{-k}] \geq \sum_{i=1}^{\lambda_a} [a p^{-i}] + \sum_{j=1}^{\lambda_b} [b p^{-j}], \quad (1)$$

die für alle Primzahlen  $p$  mit  $2 \leq p \leq \max(a, b)$  gelten muss. Aus (1) wird, wenn man links vergrößert und rechts verkleinert

$$n \sum_k p^{-k} > a \sum_i p^{-i} + b \sum_j p^{-j} - \frac{\log a b}{\log p}. \quad (2)$$

Setzt man  $a + b = s$  und beachtet  $4 a b \leq s^2$ , so wird aus (2)

$$n (1 - p^{-\lambda_n}) > s - (a p^{-\lambda_a} + b p^{-\lambda_b}) - 2 \frac{p-1}{\log p} (\log s - \log 2)$$

und hieraus, gültig für alle  $p$  mit  $2 \leq p \leq \max(a, b)$

$$n - 1 > s - 2 p - 2 \frac{p-1}{\log p} (\log s - \log 2)$$

und da dies jedenfalls für  $p = 2$  gelten muss, folgt notwendig

$$n + 1 > s - \frac{2}{\log 2} \log s. \quad (3)$$

Nun sei  $C$  eine feste Konstante  $> 2/\log 2$ . Wir nehmen an, die Ungleichung  $s \geq n + C \log n$  gälte für unendlich viele  $n$ . Für diese  $n$  folgt aus (3), dessen rechte Seite für  $s \geq 3$  monoton wächst,

$$1 + \frac{2}{\log 2} \log \left( 1 + C \frac{\log n}{n} \right) > \left( C - \frac{2}{\log 2} \right) \log n,$$

was für genügend grosse  $n$  unmöglich ist.

P. BUNDSCHUH, Freiburg-Littenweiler

*Lösung des 2. Teils* (nach Angaben des Aufgabenstellers): Wir zeigen folgendes schärfere Resultat: Es existiert eine absolute Konstante  $C$ , so dass mit  $a = [C \log n]$  der Quotient  $(2n)! / [(n+a)! n!]$  für «fast alle»  $n$  (d.h. mit Ausnahme einer Folge der Dichte Null) ganz ist. Es gilt also für fast alle  $n$

$$\binom{2n}{n} \equiv 0 \pmod{A(n, a)}, \quad A(n, a) = \prod_{i=1}^a (n+i). \quad (1)$$

Ist  $p$  eine Primzahl und

$$p^{v_p(n)} \parallel \binom{2n}{n}, \quad p^{u_p(n)} \parallel A(n, a)$$

so ist (1) äquivalent mit

$$u_p(n) \leq v_p(n). \quad (2)$$

Es sei  $x$  eine genügend grosse Zahl. Beim Beweis von (2) für die  $n \leq x$  können wir (endlich viele) Teilfolgen weglassen, wenn die Gliederanzahl je  $o(x)$  ist.

1.  $p > (\log x)^2$ , also  $p > a$ . In  $A(n, a)$  kann höchstens ein Faktor ein Multiplum von  $p$  sein. Aus  $u_p(n) \geq 2$  folgt also die Existenz eines  $i$  ( $0 < i \leq a$ ) mit  $n \equiv -i \pmod{p^2}$ . Die Anzahl der  $n \leq x$ , die in eine dieser  $a$  Restklassen mod  $p^2$  fallen, ist höchstens  $a[x/p^2]$ . Die Summation über alle  $p > (\log x)^2$  ergibt

$$\sum a[x/p^2] < a x / (\log x)^2 < C x / \log x = o(x).$$

Diese  $n$  fallen also ausser Betracht. Somit können wir uns beim Beweis von (2) auf den Fall  $u_p(n) = 1$  beschränken. In der Darstellung

$$n = a_0 + a_1 p + \dots + a_k p^k, \quad 0 \leq a_i < p \quad (3)$$

ist dann  $a_0 = p - i > p/2$ , weil

$$i \leq a < C \log x < 0,5 (\log x)^2 < p/2.$$

Bekanntlich ist  $v_p(n)$  gleich der Anzahl der  $a_i > p/2$  in (3). Aus  $u_p(n) = 1$  folgt also  $v_p(n) \geq 1$ , w. z. b. w.

2.  $p \leq (\log x)^2$ . Es sei  $w = [10 \log \log x]$ . Wir zeigen nun, dass man die  $n \leq x$ , für die es ein  $i \leq a$  und eine Primzahl  $p \leq (\log x)^2$  mit  $n + i \equiv 0 \pmod{p^w}$  gibt, weglassen kann. In der Tat ist die Anzahl dieser  $n$  höchstens gleich

$$\sum_{p \leq (\log x)^2} a \left[ \frac{x}{p^w} \right] < \frac{a x}{2^w} (\log x)^2 < \frac{C x (\log x)^3}{2^w} = o(x).$$

Wir betrachten jetzt die  $n$ , für die  $n + i \not\equiv 0 \pmod{p^w}$  für alle  $i$  ( $1 \leq i \leq a$ ). Dann ist  $a < p^w$ . Aus der Formel für die Primzahlzerlegung der Fakultät ergibt sich

$$\begin{aligned} u_p(n) &= \sum \left\{ \left[ \frac{n+a}{p^\alpha} \right] - \left[ \frac{n}{p^\alpha} \right] \right\} \leq \sum_{\alpha=1}^w \left\{ \left[ \frac{a}{p^\alpha} \right] + 1 \right\} \\ &< \frac{a}{p-1} + 10 \log \log x \leq \frac{C \log x}{p-1} + 10 \log \log x. \end{aligned} \quad (4)$$

Zur Abschätzung von  $v_p(n)$  benötigen wir die Ungleichung

$$\sum_{r=0}^L \binom{k+1}{r} < \left(\frac{5}{4}\right)^{k+1}. \quad (5)$$

Hier ist

$$L = \left\lfloor \frac{\log x}{100 \log p} \right\rfloor \quad \text{und} \quad k = \left\lfloor \frac{\log x}{\log p} \right\rfloor \quad \left(\text{oder} \quad \left\lfloor \frac{\log x}{\log p} \right\rfloor - 1\right)$$

der grösste Exponent in (3). Zum Beweis von (5) beachte man, dass  $L < (k+1)/2$ . Also gilt für genügend grosses  $k$

$$\begin{aligned} \sum_{r=0}^L \binom{k+1}{r} &< (k+1) \binom{k+1}{L} < (k+1) \frac{(k+1)^L}{L!} < (k+1) \left(\frac{(k+1)e}{L}\right)^L \\ &< (k+1) (100e)^{0,01(k+1)} < (5/4)^{(k+1)}. \end{aligned}$$

Wir beweisen nun, dass für fast alle  $n \leq x$  und alle  $p < (\log x)^2$

$$v_p(n) > \frac{\log x}{100 \log p}. \quad (6)$$

$v_p(n)$  ist wieder gleich der Anzahl der  $a_i > p/2$  in (3). Wir zeigen, dass die  $n$ , für die  $v_p(n) \leq L$  ist für irgendein  $p < (\log x)^2$ , weggelassen werden können. Es seien  $i_1, i_2, \dots, i_r$ ,  $r \leq L$ , die Indices der  $a_i > p/2$  in (3). Diese Indices kann man offenbar auf  $\sum_{r=0}^L \binom{k+1}{r}$

Arten wählen. Für jede dieser Wahlen ist die Anzahl der für  $a_j$  ( $0 \leq j \leq k$ ) möglichen Werte  $(p-1)/2$ , wenn  $j = i_s$  ( $s = 1, 2, \dots, r$ ) und  $(p+1)/2$  sonst. Die Anzahl der  $n \leq x$  mit  $v_p(n) \leq L$  ist also mit (5) nicht grösser als

$$((5/8)(p+1))^{k+1} \leq p^{k+1} (15/16)^{k+1}. \quad (7)$$

Wegen  $p^k \leq x < p^{k+1}$  und  $p \leq (\log x)^2$  ist  $p^{k+1} < x (\log x)^2$  und  $k+1 > (\log x)/(2 \log \log x)$ . Die rechte Seite von (7) ist kleiner als

$$x \left(\frac{16}{15}\right)^t \quad \text{mit} \quad t = \frac{2 \log \log x}{\log(16/15)} - \frac{\log x}{2 \log \log x},$$

also  $o(x/(\log x)^2)$ ; da höchstens  $(\log x)^2$  Werte  $p$  in Betracht kommen, ist unsere Behauptung bewiesen.

Der Abschluss des Beweises ergibt sich sofort aus (4) und (6), denn für ein genügend kleines  $C$  und ein genügend grosses  $x$  ist

$$\frac{C}{p-1} + \frac{10 \log \log x}{\log x} < \frac{1}{100 \log p}.$$

**Aufgabe 558.** Es sei  $\mathfrak{S}$  die symmetrische Gruppe vom Grade  $n+1$  dargestellt auf der Ziffernmenge  $\{1, 2, \dots, n+1\}$ . Jedem  $S \in \mathfrak{S}$  ordnen wir ein  $n$ -Tupel  $k_1(S), k_2(S), \dots, k_n(S)$  von nichtnegativen ganzen Zahlen zu, wobei  $k_i(S)$  die Anzahl der Ziffern  $j \in \{i+1, \dots, n+1\}$  ist, für die  $j S < i S$  ist. Man zeige, dass dies eine umkehrbare Zuordnung von  $\mathfrak{S}$  auf die Menge der  $n$ -Tupel  $k_1, k_2, \dots, k_n$  mit  $0 \leq k_i \leq n+1-i$  ist. Man leite daraus die Polynomidentität

$$(x-1)^n \sum_{S \in \mathfrak{S}} x^{N(S)} = \prod_{i=1}^n (x^{i+1} - 1)$$

ab, wobei  $N(S)$  die Anzahl der Paare  $(i, j)$  mit  $i < j$  und  $j S < i S$  ist.

HEINZ LÜNEBURG, Mainz

*Solution:* Let  $G$  be the set of all sequences  $(k_1, k_2, \dots, k_n)$  satisfying  $0 \leq k_i \leq n+1-i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). We denote by  $f$  the given mapping of  $\mathfrak{S}$  into  $G$ .

(a)  $f$  is injective. Let us imagine  $n+1$  empty boxes numbered by  $1, 2, \dots, n+1$ . Let  $S, T \in \mathfrak{S}$  and suppose that  $f(S) = f(T)$ , i.e., that  $k_i(S) = k_i(T)$  for all  $i = 1, 2, \dots, n$ . Since  $k_1(S) = 1 S - 1$ ,  $k_1(T) = 1 T - 1$  we infer that  $1 S = 1 T$ . Now we put a ball into the box numbered by  $1 S$ . It is easy to see that  $k_2(S)$  is equal to the number of empty boxes among the first  $2 S - 1$  boxes, i.e.,  $k_2(S) = 2 S - 1$  if  $1 S > 2 S$ , and  $k_2(S) = 2 S - 2$  if  $1 S < 2 S$ . Similarly,  $k_2(T)$  is equal to the number of empty boxes among the first  $2 T - 1$  boxes. Since  $k_2(S) = k_2(T)$  we infer that also  $2 S = 2 T$ . Now we put another ball into the box numbered by  $2 S$ . Continuing in this way we conclude that  $S = T$ .

(b)  $f$  is surjective. This follows from (a) and the fact that  $\mathfrak{S}$  and  $G$  have the same number of elements, namely  $(n+1)!$ .

(c) Since  $f$  is a bijection and  $N(S) = k_1(S) + k_2(S) + \dots + k_n(S)$  we find that

$$\begin{aligned} \sum_{S \in \mathfrak{S}} x^{N(S)} &= \sum_{S \in \mathfrak{S}} x^{k_1(S) + k_2(S) + \dots + k_n(S)} = \sum_{(k_1, \dots, k_n) \in G} x^{k_1 + \dots + k_n} \\ &= \sum_{k_n=0}^1 \sum_{k_{n-1}=0}^2 \dots \sum_{k_1=0}^n x^{k_1 + \dots + k_n} = \left( \sum_{k_n=0}^1 x^{k_n} \right) \left( \sum_{k_{n-1}=0}^2 x^{k_{n-1}} \right) \dots \left( \sum_{k_1=0}^n x^{k_1} \right) \\ &= (1+x)(1+x+x^2) \dots (1+x+\dots+x^n) = (x-1)^{-n} \prod_{i=1}^n (x^{i+1} - 1). \end{aligned}$$

D. Ž. DJOKOVIĆ, University of Waterloo, Ont., Canada

Eine weitere Lösung sandte K. ZACHARIAS (Berlin).

**Aufgabe 559.** Es sei

$$\varphi(x_1, x_2, \dots, x_k) = \sum_{i=1}^k x_i^2 + \sum_{i < j} x_i x_j, \quad i, j \in \{1, 2, \dots, k\}.$$

Man beschreibe die Lösung des Gleichungssystems

$$\varphi(x_1, \dots, x_{p-1}, x_{p+1}, \dots, x_n) = a_p \quad (p = 1, 2, \dots, n).$$

D. VOICULESCU, Bukarest

*Solution:* Put

$$p = \sum_{j=1}^n x_j, \quad q = \sum_{1 \leq j < k \leq n} x_j x_k, \quad A = \sum_{j=1}^n a_j, \quad B = \sum_{j=1}^n a_j^2.$$

Then it follows from

$$\varphi(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n) = a_j \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (*)$$

that

$$a_j + p x_j = \sum_{1 \leq j \leq k \leq n} x_j x_k = p^2 - q.$$

Summing over  $j$  gives

$$A + p^2 = n(p^2 - q), \quad A = (n-1)p^2 - nq.$$

Moreover

$$\begin{aligned} B &= \sum_{j=1}^n (p^2 - q - p x_j)^2 = n(p^2 - q)^2 - 2p^2(p^2 - q) + p^2(p^2 - 2q) \\ &= (n-1)p^4 - 2np^2q + nq^2, \end{aligned}$$

so that

$$\begin{aligned} nB &= n(n-1)p^4 - 2np^2[(n-1)p^2 - A] + [(n-1)p^2 - A]^2 \\ &= -(n-1)p^4 + 2Ap^2 + A^2, \\ (n-1)p^4 - 2Ap^2 - A^2 + nB &= 0. \end{aligned} \quad (**)$$

Hence to solve the system (\*) we determine  $p$  by means of (\*\*), then  $q$  is obtained from  $nq = (n-1)p^2 - A$ . Finally the  $x_j$  are given by

$$n a_j + n p x_j = n p^2 - n q = p^2 + A. \quad (***)$$

To verify that (\*) is indeed satisfied, we have first from (\*\*\*)

$$n A + n p \sum_{j=1}^n x_j = n (p^2 + A), \quad \sum_{j=1}^n x_j = p.$$

Also

$$\begin{aligned} n^2 p^2 \sum_{j=1}^n x_j^2 &= \sum_{j=1}^n (p^2 + A - n a_j)^2 \\ &= n (p^2 + A)^2 - 2 n (p^2 + A) A + n^2 B = n p^4 - n A^2 + n^2 B, \end{aligned}$$

so that by means of (\*\*) and (\*\*\*)

$$\begin{aligned} 2 n p^2 \sum_{1 \leq j < k \leq n} x_j x_k &= n p^2 \left\{ \left( \sum_{j=1}^n x_j \right)^2 - \sum_{j=1}^n x_j^2 \right\} \\ &= n p^4 - (p^4 - A^2 + n B) = (n-1) p^4 + A^2 - n B = (n-1) p^4 + (n-1) p^4 - 2 A p^2 \\ &= 2 p^2 [(n-1) p^2 - A] = 2 p^2 n q, \quad \sum_{1 \leq j < k \leq n} x_j x_k = q, \quad \sum_{1 \leq j \leq k \leq n} x_j x_k = p^2 - q. \end{aligned}$$

L. CARLITZ, Duke University, USA

Für  $a_1 = a_2 = \dots = a_n = a$  ist  $n B = A^2$  und zwei Lösungen von (\*\*) sind Null. In diesem Fall kann man  $x_3, x_4, \dots, x_n$  beliebig wählen und  $x_1$  und  $x_2$  aus den Gleichungen  $p = 0$  und  $q = -a$  bestimmen. Aus (\*\*\*) folgt umgekehrt, dass  $p = 0$  nur für  $a_i = a$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) möglich ist.

Weitere Lösungen sandten L. BERNSTEIN (Syracuse, USA), C. BINDSCHIEDLER (Küsnacht), D. Ž. DJOKOVIĆ (University of Waterloo, Canada), D. VELJAN (Zagreb), K. ZACHARIAS (Berlin).

## Neue Aufgaben

**Aufgabe 581.** Man beweise: Eine natürliche Zahl  $p > 1$  ist genau dann Primzahl, wenn  $\binom{n}{p} \equiv 1 \pmod{p}$  für alle natürlichen Zahlen  $n$  mit  $p \leq n < 2p$ .

E. TEUFFEL, Korntal/Stuttgart

**Aufgabe 582.** Man bestimme die Orthogonaltrajektorien der Kreise mit Radius  $R$  und mit dem Mittelpunkt auf einer festen Geraden.

T. KOETSIER, Delft

**Aufgabe 583.** Man beweise: Der Rauminhalt eines Tetraeders beträgt nicht mehr als  $\sqrt{2}/12$  der Quadratwurzel aus dem Produkt seiner Kanten.

D. VOICULESCU, Bukarest

**Aufgabe 584.** Man beweise: Für einen beliebigen Punkt eines sphärischen Dreiecks (auf der Einheitskugel) mit Seiten  $< \pi/2$  ist die Summe der (sphärischen) Eckenabstände höchstens gleich der Summe der beiden grösseren Dreiecksseiten.

G. WEGNER, Göttingen