Aufgaben

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **23 (1968)**

Heft 5

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Aufgaben

Aufgabe 556. Es sei $\sum_{i=1}^{n} a_i = 0$, a_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ eine p-te Einheitswurzel und p eine Primzahl. Man zeige, dass jede p-te Einheitswurzel gleich oft als Summand in der obigen Summe vorkommt. H. LÜNEBURG, Mainz

Lösung: Nach Voraussetzung ist jedes a_j eine der p Zahlen $\exp(2\pi i k/p) = e_k$ $(k = 0, \dots, p-1)$, sodass wir schreiben können:

$$0 = \sum_{j=1}^{u} a_j = \sum_{k=0}^{p-1} n_k e_k \quad \text{mit} \quad \sum_{k=0}^{p-1} n_k = n\,, \tag{*}$$

wobei die n_k ganzrationale nichtnegative Zahlen sind. Bekanntlich genügt e_1 (sowie $e_2, \dots, e_{p-1}$, falls $p > 2$) der über dem Integritätsbereich Γ der ganzrationalen Zahlen irreduziblen Gleichung $x^{p-1} + \cdots + 1 = 0$. Beachtet man $e_k = e_1^k$ $(k = 0, \dots, p-1)$, so genügt ferner e_1 nach (*) der Gleichung $n_{p-1} x^{p-1} + \cdots + n_0 = 0$ und aus der Identität

$$n_{p-1} x^{p-1} + \cdots + n_0 - n_{p-1}(x^{p-1} + \cdots + 1) = (n_{p-2} - n_{p-1}) x^{p-2} + \cdots + (n_0 - n_{p-1})$$

folgt, dass e_1 auch der Gleichung $(n_{p-2} - n_{p-1}) x^{p-2} + \cdots + (n_0 - n_{p-1}) = 0$ genügen müsste, woraus mit Rücksicht auf den Grad der irreduziblen Gleichung für e_1 folgt: $n_{p-1} = n_{p-2} = \cdots = n_0$ bzw. $p\, n_0 = n$ q.e.d. P. BUNDSCHUH, Freiburg-Littenweiler

Weitere Lösungen sandten: A. BRANDIS (Universität Heidelberg), D. Ž. DJOKOVIĆ (University of Waterloo, Canada), J. FEHÉR (Pécs/Ungarn), W. JÄNICHEN (Berlin-Zehlendorf).

Aufgabe 557. a, b, n seien natürliche Zahlen. Man zeige die Existenz einer absoluten Konstanten C_1 mit folgender Eigenschaft: Ist $n!\,(a!\,b!)^{-1}$ eine ganze Zahl, so ist

$$a + b < n + C_1 \log n\,.$$

Diese Aussage ist scharf in folgendem Sinn: Es gibt eine absolute Konstante C_2, so dass die Forderungen $a + b > n + C_2 \log n$, $n!\,(a!\,b!)^{-1}$ = ganze Zahl für unendlich viele n erfüllbar sind. P. ERDÖS

Lösung des 1. Teils: Wir können ohne weiteres a oder b als $\geqslant 2$ voraussetzen. Wenden wir dann die bekannte Formel $m! = \prod_{p \leqslant m} p^{e_p}$, wobei $e_p = \sum_{k=1}^{\lambda_m} [m/p^k]$ und $\lambda_m = [\log m/\log p]$ ist, auf $n!$, $a!$ und $b!$ an, so erhalten wir aus der Bedingung der Ganzheit von $n!\,(a!\,b!)^{-1}$ die Ungleichung

$$\sum_{k=1}^{\lambda_n} [n\, p^{-k}] \geqslant \sum_{i=1}^{\lambda_a} [a\, p^{-i}] + \sum_{j=1}^{\lambda_b} [b\, p^{-j}]\,, \tag{1}$$

die für alle Primzahlen p mit $2 \leqslant p \leqslant \max(a, b)$ gelten muss. Aus (1) wird, wenn man links vergrössert und rechts verkleinert

$$n \sum_k p^{-k} > a \sum_i p^{-i} + b \sum_j p^{-j} - \frac{\log a\, b}{\log p}\,. \tag{2}$$

Setzt man $a + b = s$ und beachtet $4\,a\,b \leqslant s^2$, so wird aus (2)

$$n\,(1 - p^{-\lambda_n}) > s - (a\, p^{-\lambda_a} + b\, p^{-\lambda_b}) - 2\,\frac{p-1}{\log p}\,(\log s - \log 2)$$

und hieraus, gültig für alle p mit $2 \leqslant p \leqslant \max(a, b)$

$$n - 1 > s - 2\,p - 2\,\frac{p-1}{\log p}\,(\log s - \log 2)$$

und da dies jedenfalls für $p = 2$ gelten muss, folgt notwendig

$$n + 1 > s - \frac{2}{\log 2} \log s . \tag{3}$$

Nun sei C eine feste Konstante $> 2/\log 2$. Wir nehmen an, die Ungleichung $s \geqslant n + C \log n$ gälte für unendlich viele n. Für diese n folgt aus (3), dessen rechte Seite für $s \geqq 3$ monoton wächst,

$$1 + \frac{2}{\log 2} \log \left(1 + C \frac{\log n}{n}\right) > \left(C - \frac{2}{\log 2}\right) \log n ,$$

was für genügend grosse n unmöglich ist. P. BUNDSCHUH, Freiburg-Littenweiler

Lösung des 2. Teils (nach Angaben des Aufgabenstellers): Wir zeigen folgendes schärfere Resultat: Es existiert eine absolute Konstante C, so dass mit $a = [C \log n]$ der Quotient $(2\,n)\,!\,[(n+a)\,!\,n\,!]^{-1}$ für «fast alle» n (d.h. mit Ausnahme einer Folge der Dichte Null) ganz ist. Es gilt also für fast alle n

$$\binom{2\,n}{n} \equiv 0 \pmod{A(n, a)} , \qquad A(n, a) = \prod_{i=1}^{a} (n + i) . \tag{1}$$

Ist p eine Primzahl und

$$p^{v_p(n)} \,\Big\|\, \binom{2\,n}{n} , \qquad p^{u_p(n)} \,\|\, A(n, a)$$

so ist (1) äquivalent mit

$$u_p(n) \leqq v_p(n) . \tag{2}$$

Es sei x eine genügend grosse Zahl. Beim Beweis von (2) für die $n \leqq x$ können wir (endlich viele) Teilfolgen weglassen, wenn die Gliederanzahl je $o(x)$ ist.

1. $p > (\log x)^2$, also $p > a$. In $A(n, a)$ kann höchstens ein Faktor ein Multiplum von p sein. Aus $u_p(n) \geqq 2$ folgt also die Existenz eines i $(0 < i \leqq a)$ mit $n \equiv -i \pmod{p^2}$. Die Anzahl der $n \leqq x$, die in eine dieser a Restklassen $\bmod\, p^2$ fallen, ist höchstens $a[x/p^2]$. Die Summation über alle $p > (\log x)^2$ ergibt

$$\sum a[x/p^2] < a\,x/(\log x)^2 < C\,x/\log x = o(x) .$$

Diese n fallen also ausser Betracht. Somit können wir uns beim Beweis von (2) auf den Fall $u_p(n) = 1$ beschränken. In der Darstellung

$$n = a_0 + a_1\,p + \cdots + a_k\,p^k , \quad 0 \leqq a_i < p \tag{3}$$

ist dann $a_0 = p - i > p/2$, weil

$$i \leqq a < C \log x < 0{,}5\,(\log x)^2 < p/2 .$$

Bekanntlich ist $v_p(n)$ gleich der Anzahl der $a_i > p/2$ in (3). Aus $u_p(n) = 1$ folgt also $v_p(n) \geqq 1$, w.z.b.w.

2. $p \leqq (\log x)^2$. Es sei $w = [10 \log \log x]$. Wir zeigen nun, dass man die $n \leqq x$, für die es ein $i \leqq a$ und eine Primzahl $p \leqq (\log x)^2$ mit $n + i \equiv 0 \pmod{p^w}$ gibt, weglassen kann. In der Tat ist die Anzahl dieser n höchstens gleich

$$\sum_{p \leqq (\log x)^2} a \left[\frac{x}{p^w}\right] < \frac{a\,x}{2^w} (\log x)^2 < \frac{C\,x(\log x)^3}{2^w} = o(x) .$$

Wir betrachten jetzt die n, für die $n + i \not\equiv 0 \pmod{p^w}$ für alle $i\,(1 \leqq i \leqq a)$. Dann ist $a < p^w$. Aus der Formel für die Primzahlzerlegung der Fakultät ergibt sich

$$\begin{aligned} u_p(n) = \sum \left\{\left[\frac{n+a}{p^\alpha}\right] - \left[\frac{n}{p^\alpha}\right]\right\} &\leqq \sum_{\alpha=1}^{w} \left\{\left[\frac{a}{p^\alpha}\right] + 1\right\} \\ &< \frac{a}{p-1} + 10 \log \log x \leqq \frac{C \log x}{p-1} + 10 \log \log x . \end{aligned} \tag{4}$$

Zur Abschätzung von $v_p(n)$ benötigen wir die Ungleichung

$$\sum_{r=0}^{L} \binom{k+1}{r} < \left(\frac{5}{4}\right)^{k+1}. \tag{5}$$

Hier ist

$$L = \left[\frac{\log x}{100 \log p}\right] \quad \text{und} \quad k = \left[\frac{\log x}{\log p}\right] \left(\text{oder } \left[\frac{\log x}{\log p}\right] - 1\right)$$

der grösste Exponent in (3). Zum Beweis von (5) beachte man, dass $L < (k+1)/2$. Also gilt für genügend grosses k

$$\sum_{r=0}^{L} \binom{k+1}{r} < (k+1) \binom{k+1}{L} < (k+1) \frac{(k+1)^L}{L!} < (k+1) \left(\frac{(k+1)\,e}{L}\right)^L$$

$$< (k+1)\,(100\,e)^{0{,}01\,(k+1)} < (5/4)^{(k+1)}.$$

Wir beweisen nun, dass für fast alle $n \leqq x$ und alle $p < (\log x)^2$

$$v_p(n) > \frac{\log x}{100 \log p}. \tag{6}$$

$v_p(n)$ ist wieder gleich der Anzahl der $a_i > p/2$ in (3). Wir zeigen, dass die n, für die $v_p(n) \leqq L$ ist für irgendein $p < (\log x)^2$, weggelassen werden können. Es seien $i_1, i_2, \ldots, i_r$, $r \leqq L$, die Indices der $a_i > p/2$ in (3). Diese Indices kann man offenbar auf $\sum_{r=0}^{L} \binom{k+1}{r}$ Arten wählen. Für jede dieser Wahlen ist die Anzahl der für a_j $(0 \leqq j \leqq k)$ möglichen Werte $(p-1)/2$, wenn $j = i_s$ $(s = 1, 2, \ldots, r)$ und $(p+1)/2$ sonst. Die Anzahl der $n \leqq x$ mit $v_p(n) \leqq L$ ist also mit (5) nicht grösser als

$$((5/8)\,(p+1))^{k+1} \leqq p^{k+1}\,(15/16)^{k+1}. \tag{7}$$

Wegen $p^k \leqq x < p^{k+1}$ und $p \leqq (\log x)^2$ ist $p^{k+1} < x\,(\log x)^2$ und $k+1 > (\log x)/(2 \log \log x)$. Die rechte Seite von (7) ist kleiner als

$$x \left(\frac{16}{15}\right)^t \quad \text{mit} \quad t = \frac{2 \log \log x}{\log (16/15)} - \frac{\log x}{2 \log \log x},$$

also $o(x/(\log x)^2)$; da höchstens $(\log x)^2$ Werte p in Betracht kommen, ist unsere Behauptung bewiesen.

Der Abschluss des Beweises ergibt sich sofort aus (4) und (6), denn für ein genügend kleines C und ein genügend grosses x ist

$$\frac{C}{p-1} + \frac{10 \log \log x}{\log x} < \frac{1}{100 \log p}.$$

Aufgabe 558. Es sei $\mathfrak{S}$ die symmetrische Gruppe vom Grade $n+1$ dargestellt auf der Ziffernmenge $\{1, 2, \ldots, n+1\}$. Jedem $S \in \mathfrak{S}$ ordnen wir ein n-Tupel $k_1(S), k_2(S), \ldots, k_n(S)$ von nichtnegativen ganzen Zahlen zu, wobei $k_i(S)$ die Anzahl der Ziffern $j \in \{i+1, \ldots, n+1\}$ ist, für die $j\,S < i\,S$ ist. Man zeige, dass dies eine umkehrbare Zuordnung von $\mathfrak{S}$ auf die Menge der n-Tupel $k_1, k_2, \ldots, k_n$ mit $0 \leqq k_i \leqq n+1-i$ ist. Man leite daraus die Polynomidentität

$$(x-1)^n \sum_{S \in \mathfrak{S}} x^{N(S)} = \prod_{i=1}^{n} (x^{i+1} - 1)$$

ab, wobei $N(S)$ die Anzahl der Paare (i, j) mit $i < j$ und $j\,S < i\,S$ ist.

Heinz Lüneburg, Mainz

Solution: Let G be the set of all sequences $(k_1, k_2, \dots, k_n)$ satisfying $0 \leqslant k_i \leqslant n + 1 - i$ $(i = 1, 2, \dots, n)$. We denote by f the given mapping of $\mathfrak{S}$ into G.

(a) *f is injective.* Let us imagine $n + 1$ empty boxes numbered by $1, 2, \dots, n + 1$. Let $S, T \in \mathfrak{S}$ and suppose that $f(S) = f(T)$, i.e., that $k_i(S) = k_i(T)$ for all $i = 1, 2, \dots, n$. Since $k_1(S) = 1\,S - 1$, $k_1(T) = 1\,T - 1$ we infer that $1\,S = 1\,T$. Now we put a ball into the box numbered by $1\,S$. It is easy to see that $k_2(S)$ is equal to the number of empty boxes among the first $2\,S - 1$ boxes, i.e., $k_2(S) = 2\,S - 1$ if $1\,S > 2\,S$, and $k_2(S) = 2\,S - 2$ if $1\,S < 2\,S$. Similarly, $k_2(T)$ is equal to the number of empty boxes among the first $2\,T - 1$ boxes. Since $k_2(S) = k_2(T)$ we infer that also $2\,S = 2\,T$. Now we put another ball into the box numbered by $2\,S$. Continuing in this way we conclude that $S = T$.

(b) *f is surjective.* This follows from (a) and the fact that $\mathfrak{S}$ and G have the same number of elements, namely $(n + 1)\,!$.

(c) Since f is a bijection and $N(S) = k_1(S) + k_2(S) + \cdots + k_n(S)$ we find that

$$\sum_{S \in \mathfrak{S}} x^{N(S)} = \sum_{S \in \mathfrak{S}} x^{k_1(S) + k_2(S) + \cdots + k_n(S)} = \sum_{(k_1, \dots, k_n) \in G} x^{k_1 + \cdots + k_n}$$

$$= \sum_{k_n = 0}^{1} \sum_{k_{n-1} = 0}^{2} \cdots \sum_{k_1 = 0}^{n} x^{k_1 + \cdots + k_n} = \left(\sum_{k_n = 0}^{1} x^{k_n}\right) \left(\sum_{k_{n-1} = 0}^{2} x^{k_{n-1}}\right) \cdots \left(\sum_{k_1 = 0}^{n} x^{k_1}\right)$$

$$= (1 + x)\,(1 + x + x^2) \dots (1 + x + \cdots + x^n) = (x - 1)^{-n} \prod_{i=1}^{n} (x^{i+1} - 1)\,.$$

D. Ž. Djoković, University of Waterloo, Ont., Canada

Eine weitere Lösung sandte K. Zacharias (Berlin).

Aufgabe 559. Es sei

$$\varphi\,(x_1, x_2, \dots, x_k) = \sum_{i=1}^{k} x_i^2 + \sum_{i<j} x_i\,x_j\,, \quad i, j \in \{1, 2, \dots, k\}\,.$$

Man beschreibe die Lösung des Gleichungssystems

$$\varphi\,(x_1, \dots, x_{p-1}, x_{p+1}, \dots, x_n) = a_p \quad (p = 1, 2, \dots, n)\,.$$

D. Voiculescu, Bukarest

Solution: Put

$$p = \sum_{j=1}^{n} x_j\,, \quad q = \sum_{1 \le j < k \le n} x_j\,x_k\,, \quad A = \sum_{j=1}^{n} a_j\,, \quad B = \sum_{j=1}^{n} a_j^2\,.$$

Then it follows from

$$\varphi\,(x_1, \dots, x_{j-1}, x_{j+1}, \dots, x_n) = a_j \quad (j = 1, 2, \dots, n) \qquad (*)$$

that

$$a_j + p\,x_j = \sum_{1 \le j \le k \le n} x_j\,x_k = p^2 - q\,.$$

Summing over j gives

$$A + p^2 = n\,(p^2 - q)\,, \quad A = (n - 1)\,p^2 - n\,q\,.$$

Moreover

$$B = \sum_{j=1}^{n} (p^2 - q - p\,x_j)^2 = n\,(p^2 - q)^2 - 2\,p^2\,(p^2 - q) + p^2\,(p^2 - 2\,q)$$

$$= (n - 1)\,p^4 - 2\,n\,p^2\,q + n\,q^2\,,$$

so that

$$n\,B = n\,(n - 1)\,p^4 - 2\,n\,p^2\,[(n - 1)\,p^2 - A] + [(n - 1)\,p^2 - A]^2$$

$$= -\,(n - 1)\,p^4 + 2\,A\,p^2 + A^2\,,$$

$$(n - 1)\,p^4 - 2\,A\,p^2 - A^2 + n\,B = 0\,. \qquad (**)$$

Hence to solve the system (*) we determine p by means of (**), then q is obtained from $n\,q = (n-1)\,p^2 - A$. Finally the x_j are given by

$$n\,a_j + n\,p\,x_j = n\,p^2 - n\,q = p^2 + A\,. \qquad (***)$$

To verify that (*) is indeed satisfied, we have first from (***)

$$n\,A + n\,p \sum_{j=1}^{n} x_j = n\,(p^2 + A)\,, \qquad \sum_{j=1}^{n} x_j = p\,.$$

Also

$$n^2\,p^2 \sum_{j=1}^{n} x_j^2 = \sum_{j=1}^{n} (p^2 + A - n\,a_j)^2$$
$$= n\,(p^2 + A)^2 - 2\,n\,(p^2 + A)\,A + n^2\,B = n\,p^4 - n\,A^2 + n^2\,B\,,$$

so that by means of (**) and (***)

$$2\,n\,p^2 \sum_{1 \le j < k \le n} x_j\,x_k = n\,p^2 \left\{ \left(\sum_{j=1}^{n} x_j \right)^2 - \sum_{j=1}^{n} x_j^2 \right\}$$
$$= n\,p^4 - (p^4 - A^2 + n\,B) = (n-1)\,p^4 + A^2 - n\,B = (n-1)\,p^4 + (n-1)\,p^4 - 2\,A\,p^2$$
$$= 2p^2\,[(n-1)p^2 - A] = 2\,p^2\,n\,q\,, \qquad \sum_{1 \le j < k \le n} x_j\,x_k = q\,, \qquad \sum_{1 \le j \le k \le n} x_j\,x_k = p^2 - q\,.$$

L. Carlitz, Duke University, USA

Für $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = a$ ist $n\,B = A^2$ und zwei Lösungen von (**) sind Null. In diesem Fall kann man $x_3, x_4, \ldots, x_n$ beliebig wählen und x_1 und x_2 aus den Gleichungen $p = 0$ und $q = -a$ bestimmen. Aus (***) folgt umgekehrt, dass $p = 0$ nur für $a_i = a$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ möglich ist.

Weitere Lösungen sandten L. Bernstein (Syracuse, USA), C. Bindschedler (Küsnacht), D. Ž. Djoković (University of Waterloo, Canada), D. Veljan (Zagreb), K. Zacharias (Berlin).

Neue Aufgaben

Aufgabe 581. Man beweise: Eine natürliche Zahl $p > 1$ ist genau dann Primzahl, wenn $\binom{n}{p} \equiv 1 \pmod{p}$ für alle natürlichen Zahlen n mit $p \leqslant n < 2\,p$.

E. Teuffel, Korntal/Stuttgart

Aufgabe 582. Man bestimme die Orthogonaltrajektorien der Kreise mit Radius R und mit dem Mittelpunkt auf einer festen Geraden. T. Koetsier, Delft

Aufgabe 583. Man beweise: Der Rauminhalt eines Tetraeders beträgt nicht mehr als $\sqrt{2}/12$ der Quadratwurzel aus dem Produkt seiner Kanten. D. Voiculescu, Bukarest

Aufgabe 584. Man beweise: Für einen beliebigen Punkt eines sphärischen Dreiecks (auf der Einheitskugel) mit Seiten $\leqslant \pi/2$ ist die Summe der (sphärischen) Eckenabstände höchstens gleich der Summe der beiden grösseren Dreiecksseiten. G. Wegner, Göttingen