Über das invariante Rechtwinkelpaar einer schiefen Affinität und dessen Zusammenhang mit der Jakobischen Konstruktion der Achsen einer Ellipse

Autor(en): **Sieber, Helmut**

Objekttyp: **Article**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **24 (1969)**

Heft 2

PDF erstellt am: **08.08.2024**

Persistenter Link: https://doi.org/10.5169/seals-26644

LITERATURVERZEICHNIS

[1] K. KOMMERELL, *Riemannsche Flächen im ebenen Raum von vier Dimensionen*, Math. Ann. *60*, 548–596 (1905).

[2] E. KREYSZIG, *Differentialgeometrie*. 2. Aufl. (Leipzig 1968).

[3] F. MINDING, *Wie sich entscheiden lässt, ob zwei gegebene krumme Flächen aufeinander abwickelbar sind oder nicht; nebst Bemerkungen über Flächen von unveränderlichem Krümmungsmasse*. J. reine angew. Math. *19*, 370–387 (1839).

[4] H.-W. PU, *Isometry Properties of the Surfaces of the Real and the Imaginary Parts of Analytic Functions*, M. Sc. Thesis (Supervisor E. KREYSZIG), (Ohio State University, Columbus, Ohio 1960).

[5] P. STÄCKEL, *Zur Theorie des Gaußschen Krümmungsmasses*, Ber. Verh. Kön. Sächs. Akad. Wiss. *45*, 163–169 (1893).

[6] E. ULLRICH, *Betragflächen mit ausgezeichnetem Krümmungsverhalten*, Math. Z. *54*, 297–328 (1951).

[7] E. ULLRICH, *Geometrisches über Potenzbetragflächen*, Z. angew. Math. Mech. *31*, 250–251 (1951).

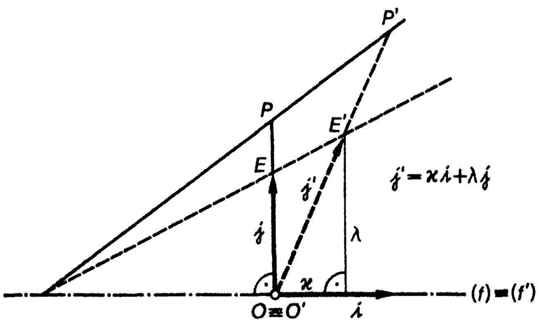
[8] A. WANGERIN, *Zur Theorie des Gaußschen Krümmungsmasses*, Ber. Verh. Kön. Sächs. Akad. Wiss. *45*, 170–172 (1893).

[9] W. WUNDERLICH, *Zur Geometrie der Potenzbetragflächen*, Arch. Math. *14*, 204–211 (1963).

[10] J. ZAAT, *Differentialgeometrie der Betragflächen analytischer Funktionen*, Mitt. Math. Sem. Univ. Giessen *30* (1944).

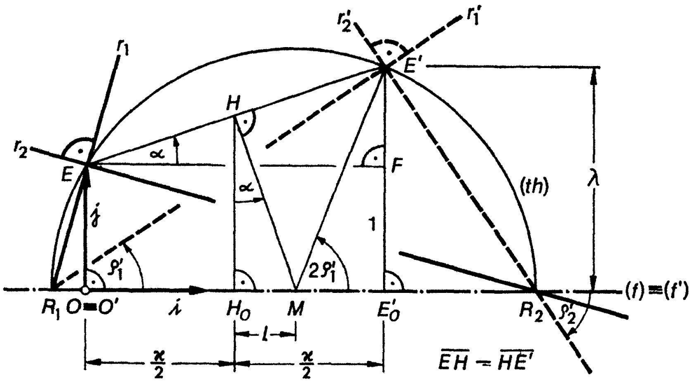
Über das invariante Rechtwinkelpaar einer schiefen Affinität und dessen Zusammenhang mit der JAKOBIschen Konstruktion der Achsen einer Ellipse

Eine perspektive Affinität sei durch ihre orientierte Fixpunktgerade $(f) \equiv (f')$ und durch ein Paar zugeordneter Punkte $P \to P'$ gegeben. Zur Beschreibung der Abbildung legen wir (f) durch einen Einheitsvektor $\mathfrak{i}$ fest, konstruieren den Bildpunkt E' eines Punktes E, der den Abstand $+1$ von (f) besitzt, und geben den Bildvektor $\overrightarrow{O'E'} = \mathfrak{j}' = \varkappa\,\mathfrak{i} + \lambda\,\mathfrak{j}$ ($\lambda \neq 0$) des Originalvektors $\overrightarrow{OE} = \mathfrak{j}$ an (siehe Figur 1). Die Abbildung ist durch $\mathfrak{j}'$ oder durch die Paramter $\varkappa$ und λ eindeutig festgelegt (vgl. [3, S. 17]).



Figur 1

Da die Frage nach dem invarianten Rechtwinkelpaar für $\varkappa = 0$ (Identität, normale Geradenspiegelung, normale Affinität) uninteressant ist, soll $\varkappa \neq 0$ vorausgesetzt werden. Für $\varkappa \neq 0$, $\lambda = 1$ erhalten wir eine Scherung, für $\varkappa \neq 0$, $\lambda = -1$ eine Schrägspiegelung, für $\varkappa \neq 0$, $|\lambda| \neq 1$ eine eigentliche schiefe Achsenaffinität. Unsere Untersuchungen für $\varkappa \neq 0$, $\lambda \neq 0$ schliessen also die Sonderfälle Scherung und schiefe Geradenspiegelung ein. In bekannter Weise konstruieren wir zunächst das invariante Rechtwinkelpaar r_1' und r_2' einer solchen perspektivaffinen Punktverwandtschaft (siehe Figur 2; vgl. z. B. [2, S. 78]) und berechnen dann die zu r_1' und r_2' gehörenden, auf $(f) \equiv (f')$ bezogenen Richtungswinkel ϱ_1' und ϱ_2' aus den Skalaren $\varkappa$ und λ.



Figur 2

1. Die Richtungswinkel des invarianten Rechtwinkelpaares

Wegen $\varrho_1' = \varrho_2' \pm 90°$ genügt es, *einen* der beiden Winkel mit Hilfe von $\varkappa$ und λ auszudrücken.

Nach dem Satz vom Mittelpunktswinkel ist $\sphericalangle\, R_2 M E' = 2\varrho_1'$ (siehe Figur 2). Da $\cot 2\varrho_1' = \cot 2\varrho_2'$ ist, gilt für jeden Richtungswinkel ϱ_i' des invarianten Rechtwinkelpaares $\cot 2\varrho_i' = \overline{ME_0'}/\overline{E_0' E'}$. Nun ist $\overline{H_0 E_0'} = \varkappa/2$. Wegen $\overline{M E_0'} = \overline{H_0 E_0'} - \overline{H_0 M} = (\varkappa/2) - l$ ist $\cot 2\varrho_i' = ((\varkappa/2) - l)/\lambda$ mit $l = \overline{H_0 M}$. Aus $\tan\alpha = \overline{FE'}/\overline{EF} = (\lambda - 1)/\varkappa$ und $\tan\alpha = \overline{H_0 M}/\overline{H_0 H} = 2l/(1+\lambda)$ ergibt sich $l = (\lambda^2 - 1)/2\varkappa$. Also gilt:

$$\cot 2\varrho_i' = \frac{1}{2}\left(\frac{\varkappa}{\lambda} - \frac{\lambda^2 - 1}{\varkappa\lambda}\right) \quad \varkappa \neq 0, \quad \lambda \neq 0 \tag{1}$$

Durch Spezialisierung von (1) für $\lambda = +1$ (Scherung) und für $\lambda = -1$ (Schrägspiegelung) erhalten wir für diese Abbildungen:

$$\text{Scherung:} \qquad \cot 2\varrho_i' = \varkappa/2 \qquad \varkappa \neq 0 \tag{1'}$$

$$\text{Schrägspiegelung:} \qquad \cot 2\varrho_i' = -\varkappa/2 \qquad \varkappa \neq 0 \tag{1''}$$

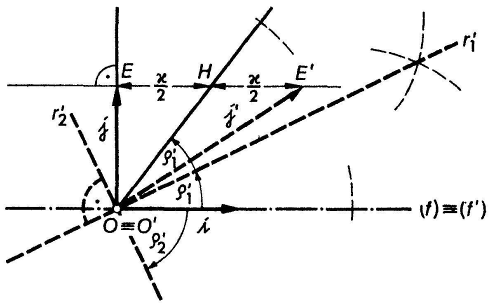
Das Rechtwinkelpaar einer Schrägspiegelung mit Parameter $\varkappa$ ergibt sich aus dem Rechtwinkelpaar einer Scherung mit demselben Parameter und derselben Achse durch Normalspiegelung an dieser Achse. Geometrisch ist das evident, da sich diese Schrägspiegelung durch Hintereinanderausführung der Scherung und der Normalspiegelung ersetzen lässt.

In der Literatur wird eine schiefe Affinität häufig nicht durch die Parameter $\varkappa$ und λ, sondern durch α und λ angegeben (α gibt die Affinitätsrichtung an, λ heisst Affinitätsverhältnis oder Affinitätsfaktor). Mit $\tan\alpha = (\lambda - 1)/\varkappa$ oder $\varkappa = (\lambda - 1)\cdot\cot\alpha$ wird (1) zu:

$$\cot 2\varrho_i' = \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda-1}{\lambda}\cdot\cot\alpha - \frac{\lambda+1}{\lambda}\cdot\tan\alpha\right) \qquad \lambda \neq 0; \quad \alpha \neq 0°, 90° \tag{2}$$

2. Zur Konstruktion des invarianten Rechtwinkelpaares

Für die Scherung liefert die Beziehung (1′) unmittelbar eine einfache Konstruktion des invarianten Rechtwinkelpaares (siehe Figur 3).



Figur 3

Es ist dieselbe Konstruktion, die in [3, S. 25/26] durch rein geometrische Betrachtungen gewonnen worden ist. Wir wollen untersuchen, ob sich aus der allgemeineren Beziehung (1) eine Konstruktion für das Rechtwinkelpaar einer eigentlichen schiefen Affinität herleiten lässt.

Durch Umformung von (1) ergibt sich:

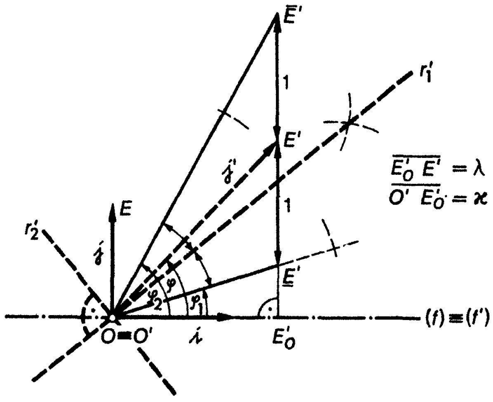
$$\cot 2\varrho_i' = \frac{1}{2}\left(\frac{\varkappa}{\lambda} - \frac{\lambda-1}{\varkappa}\cdot\frac{\lambda+1}{\varkappa}\,\frac{\varkappa}{\lambda}\right) \qquad \varkappa, \lambda \neq 0$$

Führen wir Winkel $\varphi, \varphi_1, \varphi_2$ mit

$$\tan\varphi = \frac{\lambda}{\varkappa}, \qquad \tan\varphi_1 = \frac{\lambda-1}{\varkappa}, \qquad \tan\varphi_2 = \frac{\lambda+1}{\varkappa}$$

ein (siehe Figur 4), so wird (1) zu

$$\cot 2\varrho_i' = \frac{1 - \tan\varphi_1\cdot\tan\varphi_2}{2\tan\varphi}.$$



Figur 4

Daraus folgt:

$$\tan 2\varrho_i' = \frac{2\tan\varphi}{1-\tan\varphi_1\cdot\tan\varphi_2} = \frac{\tan\varphi_1+\tan\varphi_2}{1-\tan\varphi_1\tan\varphi_2}\cdot\frac{2\tan\varphi}{\tan\varphi_1+\tan\varphi_2}$$

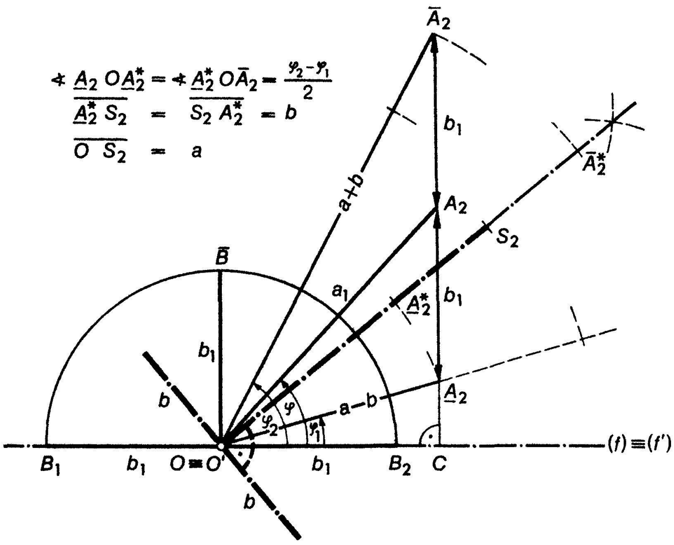
Da $\overline{\underline{E}'E'} = \overline{E'\bar{E}'}$ ist $\overline{E_0'E'}$ das arithmetische Mittel von $\overline{E_0'\underline{E}'}$ und $\overline{E_0'\bar{E}'}$. Daraus folgt, dass $\tan\varphi = {}^1/_2\,(\tan\varphi_1+\tan\varphi_2)$ und $(2\tan\varphi)/(\tan\varphi_1+\tan\varphi_2) = 1$ ist.

Damit wird $\tan 2\varrho_i' = \tan(\varphi_1+\varphi_2)$, und es gilt der

Satz: Die beiden Rechtwinkelrichtungen sind die Winkelhalbierenden der Geraden $O\underline{E}'$ und $O\bar{E}'$ (siehe Figur 4).

3. Der Zusammenhang mit der Konstruktion von R. Jakobi

Mit Hilfe der Konstruktion von Figur 4 können wir die Richtungen der Achsen einer Ellipse konstruieren, von der zwei konjugierte Durchmesser gegeben sind (siehe Figur 5):



Figur 5

Es seien $\overline{A_1A_2} = 2a_1$ und $\overline{B_1B_2} = 2b_1$ konjugierte Durchmesser einer Ellipse (e), die sich gegenseitig in O halbieren. Dann bildet die eindeutig bestimmte perspektive Affinität mit Achse B_1B_2, die Punkt $\bar{B}$ in den Bildpunkt A_2 überführt, den Kreis um O mit Radius $r = b_1$ in (e) ab. Das invariante Rechtwinkelpaar dieser Affinität liefert die Richtungen der Ellipsenachsen. Unterwerfen wir die zu dieser Affinität gehörende Figur 4 einer zentrischen Streckung mit Zentrum O und Streckfaktor b_1, so gehen die Punkte E, E', $\bar{E}'$, $\underline{E}'$ von Figur 4 in die Punkte $\bar{B}$, A_2, $\bar{A}_2$, $\underline{A}_2$ von Figur 5 über, und aus der Konstruktion von Figur 4 wird die Konstruktion von R. Jakobi.

Die Längen der Ellipsenachsen a und b ergeben sich aus $\overline{O\underline{A}_2} = a - b$ und $\overline{O\bar{A}_2} = a + b$. Diese Längen lassen sich durch abbildungsgeometrische Überlegungen oder auch durch einfache Rechnung gewinnen.

Nach dem Lehrsatz von Pythagoras ist:

$$\overline{O\underline{A}_2}^2 = \overline{OC}^2 + \overline{C\underline{A}_2}^2 \;\Big|\; \overline{O\bar{A}_2}^2 = \overline{OC}^2 + \overline{C\bar{A}_2}^2$$

Es sei $\sphericalangle\, C\,O\,A_2 = \varphi$; mit $\overline{O\,C} = a_1 \cos\varphi$ und $\overline{C\,A_2} = a_1 \sin\varphi$ ergibt sich:

$$\overline{O\underline{A}_2}^2 = a_1^2 \cos^2\varphi + (a_1 \sin\varphi - b_1)^2 \qquad \overline{O\overline{A}_2}^2 = a_1^2 \cos^2\varphi + (a_1 \sin\varphi + b_1)^2$$

$$= a_1^2 + b_1^2 - 2\,a_1\,b_1 \sin\varphi \qquad = a_1^2 + b_1^2 + 2\,a_1\,b_1 \sin\varphi$$

Nun ist aber $2\,a_1\,b_1 \sin\varphi = 2\,a\,b$ (Flächentreue!) und $a^2{}_1 + b^2{}_1 = a^2 + b^2$; damit ergibt sich:

$$\overline{O\underline{A}_2}^2 = (a - b)^2 \;\Big|\; \overline{O\overline{A}_2}^2 = (a + b)^2 \qquad \text{q.e.d.}$$

R. Jakobi hat seine Konstruktion im Jahre 1952 veröffentlicht und durch kinematische Betrachtungen bewiesen (vgl. [1]). O. Tamaschke gab 1963 einen elementargeometrischen Beweis (vgl. [4]). H. Sieber führte 1967 zwei abbildungsgeometrische Beweise, die nur Drehungen, Parallelverschiebungen und Geradenspiegelungen verwenden (vgl. [3], S. 37–39).

Helmut Sieber, Böblingen

LITERATUR

[1] R. Jakobi, *Zur Konstruktion der Achsen einer Ellipse*, Z. angew. Math. Mech. *32*, 30 (1952).
[2] M. Jeger, *Konstruktive Abbildungsgeometrie*, Räber (Luzern und Stuttgart, 1964).
[3] H. Sieber, *Achsenaffinitäten im Unterricht*, Der Mathematikunterricht, 9. Jahrgang, 1967, S. 5–47.
[4] O. Tamaschke, *Zur Konstruktion der Achsen einer Ellipse nach* R. Jakobi, El. Math. *18*, 3 (1963), S. 58.

Kleine Mitteilungen

Eine Bemerkung zum Verfahren von Leverrier

Verschiedene mathematische und technische Probleme führen auf die Berechnung des charakteristischen Polynoms

$$p_A(\lambda) = \det(\lambda\,E - A)\,,$$

wobei A eine beliebige Matrix aus $M_n(\mathrm{K})$, dem Ring der komplexen $n \times n$-Matrizen, und E die Einheitsmatrix ist. Entwickelt man diese Determinante in üblicher Weise als Summe von Produkten ihrer Elemente und ordnet dann nach fallenden Potenzen von λ, so erhält man das Ergebnis

$$p_A(\lambda) = \sum_{\omega=0}^{n} (-1)^{\omega}\, c_{\omega}\, \lambda^{n-\omega}\,,$$

wobei $c_0 = 1$, $c_n = \det A$ und für alle $j = 1, 2, \ldots, n-1$

$$c_j = \sum_{[\gamma_1, \cdots \gamma_j] \in K_j} \det \begin{pmatrix} a_{\gamma_1\gamma_1} & \cdots & a_{\gamma_1\gamma_j} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{\gamma_j\gamma_1} & \cdots & a_{\gamma_j\gamma_j} \end{pmatrix}$$

ist. K_j ist dabei die Menge sämtlicher Kombinationen j-ter Klasse ohne Wiederholung: $[\gamma_1, \ldots, \gamma_j] \subseteq [1, \ldots, n]$ und $1 \leqq \gamma_1 < \ldots < \gamma \leqq n$. ([6], S. 114).