Aufgaben

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **24 (1969)**

Heft 2

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Based upon empirical evidence and efforts to show the contrary, the author makes the following

Conjecture. If $(N, +, \cdot)$ is a near integral domain with characteristic $m > 0$ and if $\cdot$ is not one of the two binary operations defined in Theorem A, then m is a prime.

JAMES R. CLAY, University of Arizona, Tucson, Arizona, U.S.A.

REFERENCES

[1] J. R. CLAY, *The Near-Rings on Groups of Low Order*, Math. Z. *104* (1968), 364–371.
[2] J. J. MALONE, Jr., *Near-Rings with Trivial Multiplications*, Amer. Math. Monthly *74* (1967). 1111–1112.

Aufgaben

Aufgabe 569. Gegeben sind ein Tetraeder $A_1 A_2 A_3 A_4$ mit den Seitenflächen α_1, α_2, α_3, α_4 und ein Tetraeder $B_1 B_2 B_3 B_4$ mit den Seitenflächen β_1, β_2, β_3, β_4. l_i ist die Senkrechte von A_i auf β_i, m_i die Senkrechte von B_i auf α_i $(i = 1, 2, 3, 4)$. Man zeige: Wenn die Geraden l_i durch einen Punkt gehen, dann gehen auch die Geraden m_i durch einen Punkt.

O. BOTTEMA, Delft

Lösung: Der gemeinsame Punkt der Geraden l_i sei L. Das Tetraeder $B'_1 B'_2 B'_3 B'_4$ sei zu $A_1 A_2 A_3 A_4$ polarreziprok inbezug auf eine Kugel mit Zentrum L. Da seine Flächen parallel zu β_1, β_2, β_3, β_4 sind, ist es ähnlich und in ähnlicher Lage zum Tetraeder $B_1 B_2 B_3 B_4$. Die Lote von den Ecken B'_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ auf die Flächen α_i gehen durch einen Punkt (nämlich L); also gilt dasselbe von den zu ihnen parallelen (und damit in jener Ähnlichkeit homologen) Geraden m_i. (Die Aufgabe findet sich auch bei J. HADAMARD, Leçons de géométrie élémentaire, vol. II, 7 éd., Problème 559. In Problème 1215bis wird eine interessante Eigenschaft eines solchen Tetraederpaares angegeben.)

C. BINDSCHEDLER, Küsnacht

I. PAASCHE (München) zeigt, dass die entsprechende Aussage auch beim ebenen Simplex gilt.

Aufgabe 570. Démontrer qu'il existe une infinité de nombres naturels k pour lesquels il existe seulement un nombre fini > 0 de nombres triangulaires qui sont sommes de k nombres triangulaires consécutifs.

W. SIERPIŃSKI, Varsovie

Solution:

$$t_a + t_{a+1} + \cdots + t_{a+k-1} = \frac{1}{2}\left[k\,a^2 + k^2\,a + \frac{(k-1)\,k\,(k+1)}{3}\right].$$

Let $k\,[a^2 + k\,a + (k^2 - 1)/3] = m\,(m+1)$, therefore

$$(2\,m+1)^2 - k\,(2\,a + k)^2 = \frac{k^3 - 4\,k + 3}{3}.$$

Let k be an even perfect square $4\,t^2$, $t > 1$, that is not divisible by 3.

$$2\,m + 1 + 2\,t\,(2\,a + 4\,t^2) = \frac{64\,t^6 - 16\,t^2 + 3}{3}, \qquad 2\,m + 1 - 2\,t\,(2\,a + 4\,t^2) = 1$$

gives $4\,t\,(2\,a + 4\,t^2) = (64\,t^6 - 16\,t^2)/3$ or $2\,a + 4\,t^2 = (16\,t^5 - 4\,t)/3$ hence $a = -2\,t^2 + (8\,t^5 - 2\,t)/3$ an integer. Further we have $4\,m = (64\,t^6 - 16\,t^2)/3$ or m is an integer. Hence there will be at least one solution and at most a finite number of solutions if k is so chosen.

G. WULCZYN, Bucknell University, USA

P. BUNDSCHUH (Freiburg i. Br.) bewies die Aussage der Aufgabe für $k = 9\,(2\,t - 1)^2$ $(t = 1, 2, \ldots)$.

Aufgabe 571. 1. Let F denote the finite field of odd order q. Show that if $b \in F$ but not a square in F then

$$\prod_{a \in F} [(x + a)^2 - b] = (x^q - x)^2 - 4\,b\,.$$

2. More generally if F is a finite field of order q and $n \mid q - 1$, evaluate the product $\prod_{a \in F} [(x + a)^n - b]$, where $b \in F$.

L. Carlitz, Duke University, USA

Solution by the Proposer:

1. Put $b = \beta^2$, where $\beta \in \mathrm{GF}\,(q^2)$. Then $\beta^q = -\beta$ and

$$\begin{aligned}\prod_{a \in F} [(x + a)^2 - b] &= \prod_{a \in F} (x + \beta + a)\,(x - \beta + a)\\ &= [(x + \beta)^q - (x + \beta)]\,[(x - \beta)^q - (x - \beta)]\\ &= (x^q - x + \beta^q - \beta)\,(x^q - x - \beta^q + \beta)\\ &= (x^q - x - 2\,\beta)\,(x^q - x + 2\,\beta) = (x^q - x)^2 - 4\,b\ .\end{aligned}$$

2. Put $b = \beta^n$, where β is in some $\mathrm{GF}\,(q^r)$. Put $q = n\,k + 1$; then $\beta^q = \beta^{nk+1} = b^k\,\beta$. Also let $1, \omega, \ldots, \omega^{n-1}$ denote the n–n-th roots of unity in F. Then

$$\begin{aligned}\prod_{a \in F} [(x + a)^n - b] &= \prod_{a \in F} [(x + a)^n - \beta^n]\\ &= \prod_{j=0}^{n-1} \prod_{a \in F} (x + a - \omega^j\,\beta) = \prod_{j=0}^{n-1} [(x - \omega^j\,\beta)^q - (x - \omega^j\,\beta)]\\ &= \prod_{j=0}^{n-1} [x^q - x - \omega^j\,(\beta^q - \beta)] = \prod_{j=0}^{n-1} [x^q - x - \omega^j\,(b^k - 1)\,\beta]\\ &= (x^q - x)^n - b\,(b^k - 1)^n\ .\end{aligned}$$

Aufgabe 572. Wenn in einem Dreieck die Ecktransversalen die Gegenseiten im Verhältnis der x-ten Potenzen der anliegenden Seiten teilen, dann schneiden sie sich in einem Punkt, und dessen Abstände von den Seiten sind dann zu deren $(x - 1)$-ten Potenzen proportional. Dabei kann x eine beliebige reelle Zahl sein.

Man beweise die Richtigkeit dieser Aussage und ihrer Umkehrung.

O. Reutter, Ochsenhausen

Lösung: Entsprechend der Unterteilung in Abschnitte A, α setzen wir die Seite $a = \alpha + A$ usw. Aus $\alpha : A = b^x : c^x$ usw. zyklisch folgt $\alpha\,\beta\,\gamma : A\ B\ C = 1$, also existiert ein Ceva-Schnittpunkt. Er teile die Transversalen in die Abschnitte U (bis zur Ecke) und u (bis zur Seite) usw. und habe von a den Abstand ξ, usw. Der Satz von H. van Aubel $\beta : B + C : \gamma = U : u = (h_a - \xi) : \xi$ führt mittels $h_a = 2\,F : a$ auf $\xi = a^{x-1}\,2\,F : (a^x + b^x + c^x)$ usw., q.e.d.

Liegt umgekehrt ein Cevatransversalen-Schnittpunkt mit den Abständen $\xi, \eta, \zeta = t\,a^{x-1}$, $t\,b^{x-1}$, $t\,c^{x-1}$ von den Seiten a, b, c vor, so gilt offenbar $\xi\,a + \eta\,b + \zeta\,c = 2\,F$, also $t = 2\,F : (a^x + b^x + c^x)$, das heisst es liegt genau derjenige Cevatransversalen-Schnittpunkt vor, der durch die Seitenteilung $a = \alpha + A$ mit $\alpha : A = b^x : c^x$ usw. erzeugt wird, q.e.d.

Die bekanntesten Spezialfälle sind $x = 1$ (Inkreiszentrum) und $x = 0$ (Gravizentrum).

I. Paasche, München

Weitere Lösungen sandten J. Fehér (Pécs, Ungarn), E. Früh (Kradolf), W. Jänichen (Berlin), L. Kieffer (Luxemburg), S. Kleven (Steinkjer, Norwegen), E. Widmer (Biel).

Neue Aufgaben

Aufgabe 593. Gegeben ist die Sturm-Liouvillesche Differentialgleichung

$$x'' + \lambda\, p(t)\, x = 0\,,\quad a \leqq t \leqq b\,,\quad p(t) > 0\,.$$

Die Eigenfunktionen seien $g_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots$.

$$\textit{Behauptung:}\quad \begin{vmatrix} g_1(t_1) & g_2(t_1) \\ g_1(t_2) & g_2(t_2) \end{vmatrix} = 0 \;\Rightarrow\; t_1 = t_2\,.$$

H. GUGGENHEIMER, Polytechnic Institute Brooklin, USA

Aufgabe 594. Es sei V ein Rechtsvektorraum vom Range $\geqslant 4$ über dem (nicht notwendig kommutativen) Körper K. Mit $L(V)$ bezeichnen wir den Verband aller Unterräume von V, d.h. die zu V gehörige projektive Geometrie. Sind U und W Unterräume von V mit $V = U \oplus W$, so bezeichnen wir mit $\Gamma(U, W)$ die Gruppe aller Kollineationen von $L(V)$, die sowohl U als auch W punktweise festlassen. Wir sagen, dass $L(V)$ ein (U, W)-transitiver Raum ist, falls es zu zwei verschiedenen Punkten P und Q von $L(V)$ mit $P, Q \not\subseteq U, W$ und $(P + Q) \cap U \neq \{0\} \neq (P + Q) \cap W$ stets ein $\gamma \in \Gamma(U, W)$ mit $P^\gamma = Q$ gibt. Ist U ein Punkt und daher W eine Hyperebene von $L(V)$, so folgt aus der Gültigkeit des Satzes von Desargues, dass $L(V)$ ein (U, W)-transitiver Raum ist. Man zeige: In $L(V)$ gilt genau dann der Satz von Pappos, falls es zwei Unterräume U und W von V mit $V = U \oplus W$ und $r(U) > 1 < r(W)$ gibt, so dass $L(V)$ ein (U, W)-transitiver Raum ist.

H. LÜNEBURG, Mainz

Aufgabe 595. Show that

$$\left(\binom{n}{k},\, k\right) = 1 \qquad (k \leqq n \leqq 2\,k)$$

if and only if $k = p^s$, where p is prime and $s \geqq 1$.

L. CARLITZ, Duke University, USA

Aufgabe 596. Das ebene Dreieck mit den Seiten a, b, c besitze den Umfang $2\,s$, den Umkreisdurchmesser h und den Inkreisradius ϱ. Man zeige

$$(bc)^2 + (ca)^2 + (ab)^2 = (s^2 - \varrho^2 - 2\,\varrho\, h)^2 + (2\,\varrho\, s)^2\,.$$

I. PAASCHE, München

Literaturüberschau

Lineare Geometrie. Von HORST TIETZ. X und 202 Seiten mit 18 Figuren. DM 30.–. Verlag Aschendorff, Münster (Westfalen) 1967.

Das vorliegende Buch ist aus einer 2semestrigen Anfängervorlesung über lineare Algebra hervorgegangen, wie sie an den meisten Hochschulen für die Mathematiker und Physiker gehalten wird. Mit dem gewählten Titel will der Autor betonen, dass er dem geometrisch motivierten Teil der linearen Algebra in einer Anfängervorlesung eine gewisse Priorität zuschreibt. Daneben lässt das Buch noch weitere didaktische Anliegen erkennen. Wer sich in die Lektüre vertieft, wird eine erfreuliche Feststellung machen: Es gibt trotz BOURBAKI noch Dozenten, die sich der Tatsache bewusst sind, dass mit einer unvermittelt anhebenden abstrakten Breitseite auf die Studenten im ersten Studiensemester der Wirkungsgrad des Mathematikstudiums nicht unbedingt erhöht wird. TIETZ stellt seinem Buch ein Kapitel über den 3dimensionalen Anschauungsraum voran, in dem er die naive