Aufgaben

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **24 (1969)**

Heft 4

PDF erstellt am: **08.08.2024**

Thus the Sc(t, n) function, i.e. the n-th derivative of the Dirac Delta is the inverse Laplace Transform of s^n. This result is considered classical and can be found for example in [4]. S. TAUBER, Portland State University USA

REFERENCES

[1] VAN DER POL and BREMMER, *Operational Calculus* (Cambridge Univ. Press, Cambridge 1964).
[2] J. MIKUSINSKI, *Operational Calculus* (Pergamon Press, N.Y. 1959).
[3] A.H. ZEMANIAN, *Distribution Theory and Transform Analysis* (McGraw-Hill, N.Y. 1965).
[4] W. KAPLAN, *Operational Methods for Linear Systems* (Addison Wesley, Reading Mass. 1962).

Aufgaben

Aufgabe 577. K. RADZISZEWSKI (Ann. Univ. Marie Curie-Sklodowska A 10, 57–59, 1956) hat bewiesen: Es sei P der Flächeninhalt des Rechtecks, das einem gegebenen Oval umschrieben ist und das eine Seite in der Richtung θ hat. Der Flächeninhalt des Ovals sei S. Dann ist

$$\frac{4}{\pi} S \leqslant \bar{P} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P \, d\theta$$

mit Gleichheit nur für den Kreis. Man beweise: Es sei S^* der Flächeninhalt der Fusspunktkurve des Ovals für einen beliebigen inneren Punkt. Dann ist

$$\bar{P} \leqslant \frac{4}{\pi} S^*$$

mit Gleichheit nur, wenn das Oval durch eine Rotation von 90° in sich übergeführt werden kann. S^* hat ein einziges Minimum, wenn der Aufpunkt im Inneren variiert. Für glatte Ovale wird das Minimum im Krümmungsschwerpunkt angenommen.

H. GUGGENHEIMER, Polytechnic Institute of Brooklyn, USA

Lösung des Aufgabenstellers: Das Oval habe die Stützfunktion $h(\theta)$, gegeben als Funktion des Tangentenwinkels. Dann ist

$$\bar{P} = \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} h(\theta)\, h\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) d\theta .$$

Wenn der Nullpunkt des Koordinatensystems ein innerer Punkt des Ovals ist, so ist die Fusspunktkurve die Kurve deren Polargleichung $r(\phi) = h(\theta)$ ist, $\theta = \phi + \pi/2$. Daher ist

$$S^* = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} h^2(\theta) \, d\theta .$$

Die gefragte Ungleichung folgt sofort aus der Schwarzschen Ungleichung für das Integral P. Gleichheit besteht, wenn $h(\theta) = h\,(\theta + \pi/2)$ für alle θ.

Eine Translation des Aufpunktes resultiert in einer Änderung der Stützfunktion

$$h(\theta) \to h(\theta) + a \cos\theta + b \sin\theta .$$

Daher wird $S^* \to S^*$ + linearer term in a, b + positiv definiter term in a^2, b^2. Das Verschwinden des linearen Terms charakterisiert das einzige Extremum, das ein Minimum sein muss. Die linearen Terme verschwinden, wenn die beiden ersten Fourierkoeffizienten von $h(\theta)$ verschwinden (siehe z.B. meinen Artikel in «Lectures on Calculus», Holden-Day, San Francisco 1967). Dies charakterisiert den Krümmungsschwerpunkt.

Aufgabe 578. Show that

$$\sum_{r=0}^{m}\sum_{s=0}^{n}\binom{m}{r}\binom{n}{s}(a)_r(b)_s\,(b-a)_{m-r}\,(a-b)_{n-s}\,\frac{(c)_{r+s}}{(c)_r\,(c)_s} = (b)_m\,(a)_n\,\frac{(c)_{m+n}}{(c)_m\,(c)_n},$$

where

$$(a)_n = a\,(a+1)\ldots(a+n-1)\,.$$

L. Carlitz, Duke University, USA

Solution by the proposer: By Vandermonde's theorem

$$\frac{(c)_{r+s}}{(c)_r\,(c)_s} = \sum_{k=0}^{\min(r,s)}\frac{(-r)_k\,(-s)_k}{k!\,(c)_k}.$$

Then since $(a)_n = (-1)^n\,(-a-n+1)_n$, we get

$$\sum_{r=0}^{m}\sum_{s=0}^{n}\binom{m}{r}\binom{n}{s}(a)_r(b)_s\,(b-a)_{m-r}\,(a-b)_{n-s}\,\frac{(c)_{r+s}}{(c)_r\,(c)_s}$$

$$= (b-a)_m\,(a-b)_n\sum_{r,s}\frac{(-m)_r\,(-n)_s\,(a)_r\,(b)_s}{r!\,s!\,(a-b-m+1)_r\,(b-a-n+1)_s}\sum_k\frac{(-r)_k\,(-s)_k}{k!\,(c)_k}$$

$$= (b-a)_m\,(a-b)_n\sum_k\frac{(-m)_k\,(-n)_k\,(a)_k\,(b)_k}{k!\,(c)_k\,(a-b-m+1)_k\,(a-b-n+1)_k}$$

$$\cdot\sum_k\frac{(-m+k)_r\,(a+k)_r}{r!\,(a-b-m+k+1)_r}\sum_s\frac{(-n+k)_s\,(b+k)_s}{s!\,(b-a-n+k+1)_s}$$

$$= (b-a)_m\,(a-b)_n\sum_k\frac{(-m)_k\,(-n)_k\,(a)_k\,(b)_k}{k!\,(c)_k\,(a-b-m+1)_k\,(b-a-n+1)_k}$$

$$\cdot\frac{(-b-m+1)_{m-k}}{(a-b-m+k+1)_{m-k}}\,\frac{(-a-n+1)_{n-k}}{(b-a-n+k+1)_{n-k}}$$

$$= (b-a)_m\,(a-b)_n\sum_k\frac{(-m)_k\,(-n)_k\,(a)_k\,(b)_k}{k!\,(c)_k\,(a-b-m+1)_m\,(b-a-n+1)_n}$$

$$\cdot(-1)^{m+n}\,(b+k)_{m-k}\,(a+k)_{n-k}$$

$$= (b)_m\,(a)_n\sum_k\frac{(-m)_k\,(-n)_k}{k!\,(c)_k} = (b)_m\,(a)_n\,\frac{(c)_{m+n}}{(c)_m\,(c)_n}.$$

Aufgabe 579. Trouver tous les nombres naturels x pour lesquels chacun des six nombres x, $x+2$, $x+6$, $x+8$, $x+12$, $x+14$ est premier. W. Sierpiński, Varsovie

Solution: The five numbers x, $x+2$, $x+6$, $x+8$, $x+14$ form a complete system of residues, modulo 5, and $x+12 \equiv x+2 \pmod 5$.

If x is 2 or 3, one of the numbers is divisible by 5. If x is a prime greater than 5, one of the numbers must lie in the residue class 0 (mod 5), and is therefore not a prime. Only when $x = 5$ are the six numbers all primes.

L. M. R. Louden, Wake Forest University, USA

Weitere Lösungen sandten A. BAGER (Hjørring, Dänemark), P. BUNDSCHUH (Freiburg/Br.), H. HARBORTH (Braunschweig), P. HOHLER (Dietikon), F. LEUENBERGER (Feldmeilen), H. MEYER (Birkerød, Dänemark), O. REUTTER (Ochsenhausen) sowie die folgenden Studenten der Wake Forest University, USA: D. ASHCRAFT, C. CUNNINGHAM, S. GOSSETT, G.-Y. KWEK, L. VAN OOT, B. PEELER R. PETTYSOHN W. M. WATTS, D. WILSON, L. ZINZOW.

Aufgabe 580. Sei

$$i, k = 0, 1, 2, \ldots \quad \text{und} \quad a_{ik} = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad i < k, \\ (i-k)!\binom{i}{k}^2 & \text{für} \quad i \geqq k. \end{cases}$$

Man zeige

$$\sum_{n=0}^{i} a_{in} a_{nk} (-1)^{n-k} = 0^{|i-k|}.$$

I. PAASCHE, München

1. Lösung: Für $i \geqq n \geqq k$ ist

$$a_{in} a_{nk} = \frac{(i!)^2}{(n!)^2 (i-n)!} \cdot \frac{(n!)^2}{(k!)^2 (n-k)!} = \left(\frac{i!}{k!}\right)^2 \frac{1}{(i-n)!\,(n-k)!}.$$

Daraus ergibt sich nach Erweiterung mit $(i-k)!$ die Darstellung

$$a_{in} a_{nk} = \frac{i!}{k!} \binom{i}{k} \binom{i-k}{n-k} \quad \text{für} \quad i \geqq n \geqq k, \tag{1}$$

während

$$a_{in} a_{nk} = 0 \quad \text{für} \quad i < n \quad \text{oder} \quad n < k. \tag{2}$$

In der Summe $s_{ik} = \sum_{n=0}^{i} a_{in} a_{nk} (-1)^{n-k}$ verschwinden im Fall $i < k$ nach (2) alle Summanden, sodass $s_{ik} = 0$ ist für $i < k$.
Wenn andererseits $i \geqq k$ ist, gilt nach (1) und (2)

$$s_{ik} = \frac{i!}{k!} \binom{i}{k} \sum_{n=k}^{i} \binom{i-k}{n-k} (-1)^{n-k} = \frac{i!}{k!} \binom{i}{k} \sum_{m=0}^{i-k} \binom{i-k}{m} (-1)^m = \frac{i!}{k!} \binom{i}{k} (1-1)^{i-k}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{für} \quad i > k \\ 1 & \text{für} \quad i = k. \end{cases}$$

O. REUTTER, Ochsenhausen

2. Lösung: Es handelt sich um den Spezialfall $r = -1$ der für alle rationalen $r \gtrless 0$ gültigen Matrizenidentität $(a_{ik})^r = (a_{ik} r^{|i-k|})$, die ähnlich wie in El. Math. *19*, S. 40–41 (1964) leicht für alle ganzrationalen r durch vollständige Induktion nach r bewiesen wird: Die Behauptung $(a_{ik} r^{|i-k|})(a_{ik}) = (a_{ik} (r+1)^{|i-k|})$ enthält für $i \geqq n \geqq k$ links in einem Element (Zeilen-Spaltenprodukt) den Summanden $a_{in} r^{i-n} a_{nk}$, der bei Entwicklung des entsprechenden Elementes der rechten Seite dem Summanden $a_{ik}\binom{i-k}{n-k} r^{i-n}$ gleich ist, wie die leicht verifizierbare Identität

$$(i-n)! \binom{i}{n}^2 (n-k)! \binom{n}{k}^2 = (i-k)! \binom{i}{k}^2 \binom{i-k}{n-k}$$

zeigt. Weiterhin kann der einfache Beweis a. a. O. für $a_{ik} = \binom{i}{k}$ wörtlich auf die neuen a_{ik} übertragen werden.

I. PAASCHE, München

Weitere Lösungen sandten P. BUNDSCHUH (Freiburg/Br.), J. FEHÉR (Pécs/Ungarn), H. HARBORTH (Braunschweig), E. WIDMER (Biel).

Neue Aufgaben

Aufgabe 602. Es sei p eine Primzahl, $R = \{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$, $n \in R \backslash \{0\}$, $a \in R$, $x_i \in R$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

$$M_{a,n} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n)\}$$

sei die Menge der n-Tupel, die den Bedingungen

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n \equiv a \pmod{p}, \quad 0 \leqq x_1 \leqq x_2 \leqq \ldots \leqq x_n \leqq p - n$$

genügen. Man zeige

$$|M_{a,n}| = \frac{1}{p} \binom{p}{n}.$$

E. Trost, Zürich

Aufgabe 603. Man zeige, dass die Anzahl der echten Teilerketten

$$1 \mid d_1 \mid d_2 \mid \ldots \mid d_{r-1} \mid d_r = a$$

der Länge r der natürlichen Zahl $a = \prod_{i=1}^{k} p_i^{n_i}$ ($p_1, p_2, \ldots, p_k$ verschiedene Primzahlen) gleich

$$\sum_{j=0}^{r} \left\{ (-1)^j \binom{r}{j} \prod_{i=1}^{k} \binom{n_i + r - j - 1}{n_i} \right\}$$

ist.

H. Scheid, Mainz

Aufgabe 604. Es sei $0 \leqq p \leqq 1$. Man zeige

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \frac{1}{k + p - k p} = \frac{1}{p}.$$

H. Brändli, Zürich

Aufgabe 605. Man beweise

$$\underset{\text{Kummer}}{\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ 1 & 4 & 1 & & \\ 1 & 11 & 11 & 1 & \\ . & . & . & . & . \end{pmatrix}} \underset{\text{Pascal}}{\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 1 & 1 & & & \\ 1 & 2 & 1 & & \\ 1 & 3 & 3 & 1 & \\ . & . & . & . & . \end{pmatrix}} = \underset{\text{Fakultät} \cdot \text{Stirling II}}{\begin{pmatrix} 1!1 & & & & \\ 2!1 & 1!1 & & & \\ 3!1 & 2!3 & 1!1 & & \\ 4!1 & 3!6 & 2!7 & 1!1 & \\ . & . & . & . & . \end{pmatrix}}.$$

Vgl. Aufgabe 41 (El. Math. *3*, 83 (1948)).

I. Paasche, München

Literaturüberschau

Plane Geometry and its Groups. Von Heinrich W. Guggenheimer. 288 Seiten mit 168 Figuren. \$ 9.35. Holden-Day, Inc., San Francisco, Cambridge, London, Amsterdam 1967.

Dieses Buch ist ein bedeutsamer Beitrag zur Elementarmathematik vom höhern Standpunkt aus. Zwischen dem von Hilbert und Bachmann vorgezeichneten axiomatischen Aufbau der ebenen Geometrie und den Möglichkeiten der Schule liegt ein bisher nur schwach bebautes Feld, durch das der Weg zu einer modernen Schulgeometrie hindurchführt. Zwar gibt es einen scheinbaren Ausweg, der um dieses Feld herum geht: man kann