Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 25 (1970)
Heft: 2

Rubrik: Aufgaben

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 13.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

Aufgaben

Aufgabe 593. Gegeben ist die Sturm-Liouvillesche Differentialgleichung

$$x'' + \lambda\, p(t)\, x = 0\,, \quad a \leqq t \leqq b\,, \quad p(t) > 0\,.$$

Die Eigenfunktionen seien $g_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots$.

$$\textit{Behauptung:} \quad \begin{vmatrix} g_1(t_1) & g_2(t_1) \\ g_1(t_2) & g_2(t_2) \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow t_1 = t_2\,.$$

H. GUGGENHEIMER, Polytechnic Institute Brooklyn, USA

Lösung: Wir benutzen den Satz von Sturm, wonach die Eigenfunktion g_i der gegebenen Differentialgleichung zur Randwertaufgabe

$$\alpha\, x(a) + \beta\, x'(a) = 0 \qquad |\alpha| + |\beta| > 0$$

$$\gamma\, x(b) + \delta\, x'(b) = 0 \qquad |\gamma| + |\delta| > 0$$

genau $i - 1$ Nullstellen im offenen Intervall $]a, b[$ hat. In cartesischen Koordinaten betrachten wir die Kurve C: $g(t) = (g_1(t), g_2(t))$ $(t \in [a, b])$. Wir nehmen an, die Determinante der Behauptung verschwinde für $a < t_1 < t_2 < b$. $g(t_1)$ und $g(t_2)$ liegen dann auf einer Geraden s durch den Ursprung O. $\overline{C}$ sei der Teil von C mit $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$. Da g_1 in $]a, b[$ keine Nullstelle hat, also $\overline{C}$ etwa in der rechten Halbebene liegt, und da $\overline{C}$ wegen der linearen Unabhängigkeit von g_1 und g_2 nicht ganz auf s liegt, gibt es eine von s verschiedene Gerade r durch O, die mit $\overline{C}$ einen Punkt $g(t_0)$ gemeinsam hat, aber von $\overline{C}$ nicht überschritten wird. Dann ist entweder $g(t_0)$ eine Ecke von C, also $g'(t_0) = 0$, oder r ist Tangente an C. In jedem Fall ist t_0 Lösung von

$$\Delta(t) \equiv g_1(t)\, g_2'(t) - g_2(t)\, g_1'(t) = 0\,.$$

Aus den Randbedingungen folgt, dass auch a und b Lösungen sind. Es gibt daher im offenen Intervall $]a, b[$ zwei verschiedene t-Werte, für die $\Delta'(t)$ verschwindet. Andrerseits ergibt sich aus der Differentialgleichung

$$\Delta'(t) = g_1(t)\, g_2''(t) - g_2(t)\, g_1''(t) = (\lambda_1 - \lambda_2)\, p(t)\, g_1(t)\, g_2(t)$$

(vgl. Beweis der Orthogonalitätsrelationen). Es folgt, da $p(t) > 0$, dass $\Delta'(t)$ genau eine Nullstelle in $]a, b[$ hat, nämlich die von g_2. Der angenommene Fall ist also unmöglich und die Behauptung folgt, wenn t_1, t_2 in $]a, b[$ liegen. Lässt man aber $t_1 = a$ oder $t_2 = b$ zu, so braucht sie nicht erfüllt zu sein, wenn nämlich $x(a) = 0$ bzw. $x(b) = 0$ eine der Randbedingungen ist. Doch sind das die einzigen Ausnahmen. E. HEIL, TH Darmstadt

Aufgabe 595. Show that

$$\left(\binom{n}{k}, k\right) = 1 \quad (k \leqslant n \leqslant 2\,k)$$

if and only if $k = p^s$, where p is a prime and $s \geqslant 1$. L. CARLITZ, Duke University, USA

Anmerkung der Redaktion: Ohne Wesentliches zu verlieren, kann man sich auf $k > 1$ beschränken; andernfalls ist auch $s = 0$ zulässig. Die meisten Einsender weisen darauf hin, dass $p = 2$ oder $n = 2\,k$ ausgeschlossen werden müssen (Absicht des Aufgabenstellers: $k \leqslant n < 2\,k$; Schreibfehler in seinem Manuskript).

Lösung: Der Exponent α der Primzahl p in der kanonischen Zerlegung von $\binom{n}{k}$ ergibt sich zu

$$\alpha = \sum_{\nu \geqq 1} \left\{ \left[\frac{n}{p^\nu}\right] - \left[\frac{n-k}{p^\nu}\right] - \left[\frac{k}{p^\nu}\right] \right\}$$

mit Summanden $\geqq 0$. Ist $k = p^s$, so verschwinden für $1 \leqq \nu \leqq s$ die einzelnen Summanden wegen $[(n - p^s)/p^\nu] = [n/p^\nu] - p^{s-\nu}$. Für $\nu > s$ werden schon die eckigen Klammern Null, weil n, $n - k$ und $k \leqq 2\,p^s < p^{s+1}$ bzw. $< 2\,p^s \leqq p^{s+1}$ gilt, falls die Aufgabe in «p is an odd prime» bzw. «$(k \leqq n < 2\,k)$» abgeändert wird (mit $k = 2^s$ und $n = 2\,k$ ergibt sich andernfalls $\left(\binom{n}{k}, k\right) = 2$).

Sei umgekehrt $k = v\,p^s$, $(v, p) = 1$, $v > p > 2$ (bzw. $\geqq 2$), so folgt für jedes $n = w\,p^{s+1}$ mit einer natürlichen Zahl w aus $p < v \leqq w\,p \leqq 2\,v$ (bzw. $< 2\,v$), dass

$$\alpha \geqq \left[\frac{n}{p^{s+1}}\right] - \left[\frac{n-k}{p^{s+1}}\right] - \left[\frac{k}{p^{s+1}}\right] = -\left[-\frac{v}{p}\right] - \left[\frac{v}{p}\right] = 1$$

und damit $\left(\binom{n}{k}, k\right) \geqq p$ gilt.

H. Harborth, Braunschweig

Weitere Lösungen sandten A. Bager (Hjørring), P. Bundschuh (Freiburg i. Br.), J. Fehér (Pécs, Ungarn), H. Meili (Winterthur), H. Müller (Berlin), H. Niederreiter (Wien), O. Reutter (Ochsenhausen), H. Scheid (Mainz), W. Stahl (Karlsruhe), E. Teuffel (Korntal/Stuttgart).

Aufgabe 596. Das ebene Dreieck mit den Seiten a, b, c besitze den Umfang $2\,s$, den Umkreisdurchmesser h und den Inkreisradius ϱ. Man zeige

$$(bc)^2 + (ca)^2 + (ab)^2 = (s^2 - \varrho^2 - 2\,\varrho\,h)^2 + (2\,\varrho\,s)^2\,.$$

I. Paasche, München

Lösung: Bezeichnen wir mit F die Fläche des Dreiecks, so gilt bekanntlich

$$s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c) = F^2,$$

hieraus folgt mit Rücksicht auf $F = s\,\varrho$

$$s\,[s^3 - s^2\,(a+b+c) + s\,(ab+bc+ca) - abc] = s^2\,\varrho^2\,,$$

weiterhin mit Anwendung des ebenfalls wohlbekannten Zusammenhangs $abc = 2\,h\,s\,\varrho$

$$s^2 - 2\,s^2 + (ab+bc+ca) - 2\,h\,\varrho = \varrho^2,$$

woraus

$$ab + bc + ca = s^2 + \varrho^2 + 2\,h\,\varrho$$

und

$$(ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2 = (s^2 + \varrho^2 + 2\,h\,\varrho)^2 - 2\,abc\,(a+b+c)\,,$$

$$(ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2 = s^4 + 2\,s^2\,\varrho^2 + \varrho^4 + 4\,h\,s^2\,\varrho + 4\,h\,\varrho^3 + 4\,h^2\,\varrho^2 - 8\,h\,s^2\,\varrho - 2\,s^2\,\varrho^2 + 2\,s^2\varrho^2$$

und nach Umformung

$$(ab)^2 + (bc)^2 + (ca)^2 = (s^2 - \varrho^2 - 2\,h\,\varrho)^2 + (2\,s\,\varrho)^2 \quad \text{q.e.d.}$$

J. Schopp, Budapest

Weitere Lösungen sandten A. Bager (Hjørring), L Carlitz (Durham, N C , USA), H Frischknecht (Berneck), F. Götze (Jena), P. Hohler (Dietikon), W. Jänichen (Berlin), F. Leuenberger (Feldmeilen), A. Makowski (Warszawa), Ž. M. Mitrović (Vranje, Jugoslawien), J. Quoniam (Saint-Etienne), O. Reutter (Ochsenhausen), E. Rothmund (Wallisellen), K. Schuler (Rottweil), D. Svrtan (Zagreb).

Verschiedene Autoren stützen sich auf ein Resultat von J. Steinig, El. Math. *18*, (1963), 127 – 131, und A. Makowski zitiert W. J. Blundon, «On Certain Polynomials Associated with the Triangle», Math. Magazine *36*, (1963) 247–248. K. Schuler erwähnt die Möglichkeit, aus den Newtonschen Identitäten (zwischen Potenzsummen und elementarsymmetrischen Funktionen) weitere Formeln dieser Art zu gewinnen.

Neue Aufgaben

Aufgabe 618. Ist für jede Primzahl $p > 2$ $\eta(p)$ die kleinste natürliche Zahl k mit $2^k \equiv 1 \pmod{p}$, $E(r)$ für $r \geqslant 2$ die Anzahl der Primzahlen p mit $\eta(p) = r$ und $A(x, \delta)$ für $0 < \delta < 1$ die Anzahl aller Primzahlen p mit $p \leqslant x$ und $\eta(p) > p^\delta$, so gilt:

$$E(r) \leqslant \ln 2 \cdot \frac{r}{\ln r} \quad (r \geqslant 2)\,, \qquad A(x, \delta) = \frac{x}{\ln x} + o\left(\frac{x}{\ln x}\right) \quad \left(0 < \delta < \frac{1}{2}\right)$$

und

$$A\left(x, \frac{1}{2}\right) \geqq (1 - \ln 2) \cdot \frac{x}{\ln x} + o\left(\frac{x}{\ln x}\right) \quad (x \to \infty)\,.$$

Man beweise diese Behauptungen. G. JAESCHKE, Sindelfingen

Aufgabe 619. Let k be an integer larger than 1, p_n the nth prime, $\varphi(m)$ the number of positive integers less than m which are relatively prime to m, $\sigma(m)$ the sum of the divisors of m, and ζ the Riemann Zeta function. Prove the following:

$$\zeta(k) = \lim_{n \to \infty} \frac{(p_1 \times \ldots \times p_n)^k}{\varphi(p_1 \times \ldots \times p_n) \times \sigma[(p_1 \times \ldots \times p_n)^{k-1}]}\,.$$

R. E. ATALLA, Athens, Ohio, USA

Aufgabe 620. Es seien P ein beliebiger Punkt eines konvexen ebenen n-Ecks $A_1 A_2 \ldots A_n$, R_i der Abstand PA_i $(i = 1, \ldots, n)$ und $A(R_i)$ das arithmetische Mittel der R_i. Ferner seien r der Inkreis- und R der Umkreisradius von $A_1 A_2 \ldots A_n$. Man beweise die folgenden Beziehungen:

$$A(R_i) \geqslant \frac{4}{9}\, r \left(5 - \frac{r}{R}\right) \quad \text{und} \quad A(R_i) \geqslant \frac{2}{3}\, r \sqrt[4]{48\,\frac{R}{r} - 15} \quad \text{für } n = 3;$$

$$A(R_i) \geqslant 2\sqrt{2}\, \frac{\operatorname{tg}(\pi/2\,n)}{\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2(\pi/2\,n)}}\, r \quad \text{für } n \geqslant 3\,.$$

J. BERKES, Szeged

Aufgabe 621. Démontrer d'une façon élémentaire en deux lignes qu'il existe une infinité de nombres triangulaires qui sont, de deux façons au moins, sommes de deux nombres triangulaires. Démontrer d'une façon élémentaire en trois lignes qu'il existe une infinité de nombres triangulaires qui sont, de trois façons au moins, sommes de deux nombres triangulaires. W. SIERPIŃSKI, Varsovie

Bericht

Mathematische Problemwettbewerbe im Kanton Bern

Vor kurzem wurde an dieser Stelle (El. Math. *23*, 18–20 (1968)) über einen an den Mittelschulen des Kantons Bern durchgeführten Wettbewerb im Lösen mathematischer Probleme berichtet. Inzwischen hat die bernische «Informationsstelle für Mathematikunterricht» zwei weitere Wettbewerbe dieser Art veranstaltet.

Wettbewerb 2 (1967/68) umfasste die Lösung von sechs Aufgabenserien, die jede aus zwei leichteren und zwei schwierigeren Aufgaben bestanden. Für richtige Lösungen der leichteren Aufgaben wurden maximal je 5, für die der schwierigeren Aufgaben je 10 Punkte gutgeschrieben. Nach der Erzielung von jeweils 30 Punkten erhielt ein Teilnehmer einen Buchpreis, zudem wurden nach Abschluss der sechs Serien die Teilnehmer mit den drei höchsten kumulierten Punktzahlen prämiert. Es konnten insgesamt 71 Zwischenprämien und 5 Schlussprämien verliehen werden, die letzteren alle für Schüler von Realgymnasien.