Neue Aufgaben

Aufgabe 618. Ist für jede Primzahl $p > 2$ $\eta(p)$ die kleinste natürliche Zahl k mit $2^k \equiv 1 \pmod{p}$, $E(r)$ für $r \geqslant 2$ die Anzahl der Primzahlen p mit $\eta(p) = r$ und $A(x, \delta)$ für $0 < \delta < 1$ die Anzahl aller Primzahlen p mit $p \leqslant x$ und $\eta(p) > p^\delta$, so gilt:

$$E(r) \leqslant \ln 2 \cdot \frac{r}{\ln r} \quad (r \geqslant 2)\,, \qquad A(x, \delta) = \frac{x}{\ln x} + o\left(\frac{x}{\ln x}\right) \quad \left(0 < \delta < \frac{1}{2}\right)$$

und

$$A\left(x, \frac{1}{2}\right) \geqq (1 - \ln 2) \cdot \frac{x}{\ln x} + o\left(\frac{x}{\ln x}\right) \qquad (x \to \infty)\,.$$

Man beweise diese Behauptungen. G. JAESCHKE, Sindelfingen

Aufgabe 619. Let k be an integer larger than 1, p_n the nth prime, $\varphi(m)$ the number of positive integers less than m which are relatively prime to m, $\sigma(m)$ the sum of the divisors of m, and ζ the Riemann Zeta function. Prove the following:

$$\zeta(k) = \lim_{n\to\infty} \frac{(p_1 \times \ldots \times p_n)^k}{\varphi(p_1 \times \ldots \times p_n) \times \sigma[(p_1 \times \ldots \times p_n)^{k-1}]}\,.$$

R. E. ATALLA, Athens, Ohio, USA

Aufgabe 620. Es seien P ein beliebiger Punkt eines konvexen ebenen n-Ecks $A_1 A_2 \ldots A_n$, R_i der Abstand PA_i $(i = 1, \ldots, n)$ und $A(R_i)$ das arithmetische Mittel der R_i. Ferner seien r der Inkreis- und R der Umkreisradius von $A_1 A_2 \ldots A_n$. Man beweise die folgenden Beziehungen:

$$A(R_i) \geqslant \frac{4}{9}\, r \left(5 - \frac{r}{R}\right) \quad \text{und} \quad A(R_i) \geqslant \frac{2}{3}\, r \sqrt[4]{48 \frac{R}{r} - 15} \quad \text{für } n = 3;$$

$$A(R_i) \geqslant 2\sqrt{2}\, \frac{\operatorname{tg}(\pi/2\,n)}{\sqrt{1 - \operatorname{tg}^2(\pi/2\,n)}}\, r \quad \text{für } n \geqslant 3\,.$$

J. BERKES, Szeged

Aufgabe 621. Démontrer d'une façon élémentaire en deux lignes qu'il existe une infinité de nombres triangulaires qui sont, de deux façons au moins, sommes de deux nombres triangulaires. Démontrer d'une façon élémentaire en trois lignes qu'il existe une infinité de nombres triangulaires qui sont, de trois façons au moins, sommes de deux nombres triangulaires. W. SIERPIŃSKI, Varsovie

Bericht

Mathematische Problemwettbewerbe im Kanton Bern

Vor kurzem wurde an dieser Stelle (El. Math. *23*, 18–20 (1968)) über einen an den Mittelschulen des Kantons Bern durchgeführten Wettbewerb im Lösen mathematischer Probleme berichtet. Inzwischen hat die bernische «Informationsstelle für Mathematikunterricht» zwei weitere Wettbewerbe dieser Art veranstaltet.

Wettbewerb 2 (1967/68) umfasste die Lösung von sechs Aufgabenserien, die jede aus zwei leichteren und zwei schwierigeren Aufgaben bestanden. Für richtige Lösungen der leichteren Aufgaben wurden maximal je 5, für die der schwierigeren Aufgaben je 10 Punkte gutgeschrieben. Nach der Erzielung von jeweils 30 Punkten erhielt ein Teilnehmer einen Buchpreis, zudem wurden nach Abschluss der sechs Serien die Teilnehmer mit den drei höchsten kumulierten Punktzahlen prämiert. Es konnten insgesamt 71 Zwischenprämien und 5 Schlussprämien verliehen werden, die letzteren alle für Schüler von Realgymnasien.

Wettbewerb 3 (1968/69) wurde als Mannschaftswettbewerb durchgeführt. Jede Mannschaft bestand aus drei Schülerinnen oder Schülern, die zwei Runden zu je 5 Aufgaben zu bewältigen hatten. Es nahmen insgesamt 63 Mannschaften aus fast allen Gymnasien des Kantons teil. Die dritte Runde wurde von den acht Gruppen mit den höchsten erreichten Punktzahlen bestritten. Sie bestand aus der Lösung von fünf Aufgaben in dreistündiger Klausur; jedes der drei Mitglieder einer Mannschaft musste gesondert arbeiten, die erreichten Punkte wurden jedoch zu den Mannschaftspunkten addiert. Den Wettbewerb gewann dank der homogenen Einzelleistungen in der Schlussrunde die Mannschaft einer Sekunda eines Realgymnasiums.

Nachfolgend sämtliche an den beiden Wettbewerben gestellten Aufgaben in einer gegenüber der den Schülern ausgeteilten etwas gerafften Fassung.

Wettbewerb 2 (sechs Serien zu je zwei leichteren (L) und zwei schwierigeren (S) Aufgaben).

L 1 Beweise: Unter zehn aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen gibt es stets mindestens eine, die zu jeder der neun andern teilerfremd ist.

L 2 AB sei eine der kürzeren Seiten des Rechtecks $ABCD$. Fälle von C aus das Lot auf die Diagonale BD. Der Schnittpunkt dieses Lotes mit der Geraden AB sei E, der Schnittpunkt der Seite AD mit dem Kreis um B vom Radius BC sei F. Beweise, dass EF auf FB senkrecht steht.

S 1 Beweise: Zu jeder natürlichen Zahl z, die weder durch 2 noch durch 5 teilbar ist, gibt es ein Vielfaches kz, das (in Dezimalschreibweise) die Form 999 ... 99 hat.

S 2 Von drei Schachteln enthält eine zwei schwarze (S) Kugeln, eine zwei weisse (W) und die dritte eine schwarze und eine weisse Kugel. Weiter stehen drei Etiketten mit den Aufschriften SS, WW und SW zur Verfügung. Ein «Zug» ist die Entnahme einer Kugel aus einer Schachtel und die Feststellung ihrer Farbe. Die Kugel wird nicht zurückgelegt.

Es ist in den folgenden drei Fällen die minimale Zugzahl zur Feststellung der Schachtelinhalte anzugeben:

Fall 1: Auf keiner Schachtel klebt die richtige Etikette.

Fall 2: Eine Schachtel ist richtig etikettiert, es ist jedoch unbekannt, welche. Die beiden andern tragen falsche Etiketten.

Fall 3: Die Schachteln tragen überhaupt keine Etiketten.

L 3 Über jeder Seite eines konvexen Vielecks, dessen Punkte in einem abgeschlossenen Quadrat der Seitenlänge 1 liegen, wird nach aussen hin ein Quadrat errichtet. Bestimme das Maximum der Summe der Flächeninhalte dieser Aufsatzquadrate.

L 4 Aus den Ziffern $0, 1, \dots, 8, 9$ sind zwei fünfstellige Zahlen mit möglichst grossem Produkt zu bilden. Jede der Ziffern ist dabei genau einmal zu verwenden.

S 3 Eine Menge ganzer Zahlen heisse periodisch mit der Periode m, wenn sie mit a auch $a + m$ und $a - m$ enthält. Beweise: Der Durchschnitt zweier periodischer Mengen ist wieder periodisch. Ist er nicht leer, so bestimme man sein kleinstes positives Element.

S 4 Beweise: n Punkte in allgemeiner Lage in einer Ebene sind stets die Ecken eines einfach geschlossenen n-Ecks.

L 5 Drei Leichtathletikvereine aus Bern, Genf und Zürich bestreiten ein Meeting; zu jeder Konkurrenz sendet jeder Verein einen Sportler. Ein Reporter interviewt eine Zuschauerin. R: Wer hat gewonnen? Z: Bern hat das Kugelstossen gewonnen, aber Genf gewann das Meeting mit 22 Punkten. Bern und Zürich erzielten je 9 Punkte. R: Wie wurden die Punkte verteilt? Z: Der erste jedes Wettkampfs erhielt eine bestimmte Punktzahl, der zweite eine kleinere, der dritte eine noch kleinere, aber mindestens einen Punkt. Die Verteilung war für alle Konkurrenzen dieselbe. R: Wieviele Konkurrenzen fanden statt? Z: Ich weiss es nicht mehr. R: Wer hat den Hochsprung gewonnen? Z: Ich weiss es nicht. Aber ein Hochsprung fand statt. Welcher Verein hat den Hochsprung gewonnen?

L 6 Ein Rechteck mit den ganzzahligen Seitenlängen m und n sei gitterförmig in mn Einheitsquadrate aufgeteilt. Es ist – als Funktion von m und n – die Anzahl der

Strecken anzugeben, in die eine Diagonale des Rechtecks durch das Quadratgitter zerlegt wird.

S 5 Gibt es ganzzahlige Werte von a derart, dass die Zahl $z = 82^n + a \cdot 69^n$ für alle ungeraden n durch 1963 teilbar ist? Wenn ja, welches ist das kleinste positive a dieser Art?

S 6 $d(n)$ bezeichne die Anzahl, $s(n)$ die Summe der Teiler einer natürlichen Zahl $n \geqslant 2$. Beweise: $\dfrac{s(n)}{d(n)} \geqslant \sqrt{n}$.

L 7 Beweise: Die Mittelpunkte der vier Quadrate, die über den Seiten eines Parallelogramms nach aussen errichtet werden, bilden die Eckpunkte eines Quadrats.

L 8 Konstruiere mit dem Zirkel allein den Mittelpunkt einer Strecke.

S 7 k sei eine positive reelle Zahl, a, b, c seien positive reelle Lösungen der Gleichung $a + b + c = k$. Gibt es stets ein $x = x(k)$ derart, dass $abc \leqslant x$?

S 8 Die Eckpunkte eines Dreiecks D seien Gitterpunkte eines ebenen Einheits-Quadratgitters. $I(D)$ bzw. $R(D)$ sei die Anzahl der Gitterpunkte im Innern bzw. auf dem Rand des Dreiecks. Bestimme den Flächeninhalt des Dreiecks als Funktion von $I(D)$ und $R(D)$.

L 9 Es gelten folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned} 12 &= 4 \cdot 3 \\ 1122 &= 34 \cdot 33 \\ 111222 &= 334 \cdot 333 \\ 11112222 &= 3334 \cdot 3333\,. \end{aligned}$$

Lässt sich dieses Schema beliebig fortsetzen?

L 10 Ein konvexes Polygon liege ganz im Innern oder auf dem Rande eines (nicht notwendig konvexen) Polygons. Beweise, dass der Umfang des ersten Polygons höchstens gleich demjenigen des zweiten sein kann.

S 9 Ausgehend von einem Dreieck $D_1 = P_1Q_1R_1$ und seinem Umkreis K wird eine Dreiecksfolge D_n wie folgt konstruiert: die Punkte P_n, Q_n, R_n liegen respektive auf den Kreisbogen $Q_{n-1}R_{n-1}$, $R_{n-1}P_{n-1}$, $P_{n-1}Q_{n-1}$ von K und halbieren sie. Beweise, dass die Dreiecke D_n – der Form nach – gegen ein gleichseitiges Dreieck konvergieren. (Es wurde nur eine anschauliche Version der «Konvergenz» verlangt.)

S 10 Q sei ein beliebiger Punkt auf dem Umkreis K eines regulären Achtecks. Beweise, dass die Summe der vierten Potenzen der Abstände von Q zu den vier Diagonalen des Achtecks von der Lage von Q auf K unabhängig ist.

L 11 Suche alle Brüche mit dreistelligen Zählern und Nennern, für die

$$\frac{p\,q\,r}{q\,r\,s} = \frac{p}{s}$$

(Falsches Kürzen von qr mit richtigem Resultat. Triviales Resultat $p = q = r = s$ war nicht anzugeben.)

L 12 In der abgeschlossenen Kreisscheibe vom Radius 1 liegen n Punkte derart, dass die Distanz zwischen je zweien der Punkte grösser als $\sqrt{2}$ ist. Zeige, dass $n \leqslant 3$ sein muss.

S 11 Besitzt die Gleichung $n = p + (p + q - 1)(p + q - 2)/2$ bei gegebenem natürlichen n stets eine eindeutige Lösung in natürlichen Zahlen p, q?

S 12 Beweise: Ein Streckenkomplex lässt sich genau dann in einem Zug durchlaufen, wenn er zusammenhängend ist und alle seine Ecken gerade Ordnung haben.

***

Wettbewerb 3. Drei Serien zu je 5 Aufgaben. Die Aufgaben 1.1–2.5 wurden von Dreiermannschaften gelöst, die Aufgaben 3.1–3.5 in dreistündiger Klausur von den einzelnen Mitgliedern der Mannschaften.

1.1 Rekonstruiere die folgende Divisionsaufgabe (o bedeutet eine fehlende Ziffer):

```
oooooooo : ooo = oo8oo
ooo
 oooo
  ooo
   oooo
   oooo
    —
```

1.2 Zu welchen Zeitpunkten zwischen 0h und 12h halbiert auf einer Uhr mit Stunden-, Minuten- und Sekundenzeigern ein Zeiger den Winkel zwischen den beiden andern?

1.3 In einem ebenen Quadratgitter liege ein Dreieck mit seinen Ecken in Gitterpunkten. Auf dem Rand des Dreiecks befinden sich keine weiteren Gitterpunkte, im Innern ein einziger. Beweise, dass dieser der Schwerpunkt des Dreiecks ist.

1.4 In einer Ebene seien $n \geqslant 4$ Punkte gegeben, von denen keine drei auf einer Geraden und keine vier auf einem Kreis liegen. Gibt es stets einen Kreis durch 3 der gegebenen Punkte, der alle $n - 3$ andern Punkte in seinem Innern enthält?

1.5 Für welche natürlichen n ist $1 + 1/2 + \ldots + 1/n$ eine natürliche Zahl?

2.1 $a, e_1, e_2, e_3, \ldots$ seien natürliche Zahlen. Suche notwendige und hinreichende Bedingungen dafür, dass in der Folge

$$a^{e_1} + 1, \quad a^{e_1 e_2} + 1, \quad a^{e_1 e_2 e_3} + 1, \ldots$$

je zwei verschiedene Glieder teilerfremd sind.

2.2 P, P_1, P_2, P_3 seien Punkte des dreidimensionalen Raumes. Es werde gesetzt:

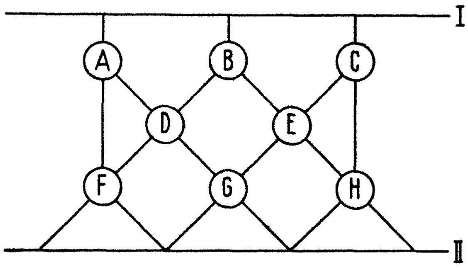
$$S(P) = |PP_1|^2 + |PP_2|^2 + |PP_3|^2 .$$

Für welche Lagen von P ist, bei festen P_1, P_2, P_3, $S(P)$ minimal?

2.3 Es ist eine Teilbarkeitsregel für den Divisor 101 anzugeben.

2.4 In einer cartesischen Ebene sei $M(\sqrt{2}, 1/3)$ Mittelpunkt eines Kreises. Zeige, dass sich bei gegebenem natürlichen n dessen Radius so angeben lässt, dass er genau n Gitterpunkte (p, q) (p, q ganz) im Innern enthält. Gilt eine analoge Aussage auch für das Zentrum $M'(1/4, 1/3)$?

2.5 Das nachfolgende Schema stellt einen Rangierbahnhof dar. $A, B, \ldots, H$ seien Weichen; die Züge fahren stets von I nach II; bei jeder Fahrt über eine Weiche stellt diese ihre Richtung um (von rechts auf links bzw. von links auf rechts).



Ausgangslage der Weichen: alle nach rechts
1. Endlage: A, B, C, D, E nach rechts, F, G, H nach links,
2. Endlage: alle nach links.

Lässt sich von der Ausgangslage her durch passende Zugsfahrten die 1. bzw. die 2. Endlage erreichen? Wieviele Zugsfahrten sind jeweils mindestens nötig?

3.1 Welches sind, in der Dezimaldarstellung, die letzten beiden Ziffern der Zahl

$$2^{(2^{73})} ?$$

3.2 Die Seitenlängen der Felder eines Schachbretts betragen 2 cm. Wie gross ist im Maximum der Radius eines Kreises, der ganz in den (als abgeschlossen betrachteten) schwarzen Quadraten verläuft?

3.3 Im Kryptogramm

$$\mathrm{GIB} + \mathrm{MIR} = \mathrm{GELD}$$

bedeuten die Buchstaben Ziffern, und zwar bedeuten verschiedene Buchstaben verschiedene Ziffern. Diese sind so zu wählen, dass die Addition richtig wird. Für welche Basis des zugrundegelegten Zahlsystems ist die sich für «GELD» ergebende Summe möglichst klein?

3.4 Beweise, dass für jedes natürliche n

$$(5\,n)!/(40^n \cdot n!)$$

eine natürliche Zahl ist.

3.5 D bezeichne den grössten, d den kleinsten unter den sechs möglichen Abständen von vier verschiedenen Punkten einer Ebene. Beweise: $D/d \geqslant \sqrt{2}$.

J. BINZ, P. WILKER, Bern

Literaturüberschau

Funktionalanalytische Methoden der numerischen Mathematik. Vortragsauszüge der Tagung vom 19. bis 25. November 1967 im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach (Schwarzwald). Herausgegeben von L. COLLATZ und H. UNGER. International Series of Numerical Mathematics, Vol. 12. 143 Seiten mit 18 Figuren. Fr. 24.–. Birkhäuser-Verlag, Basel und Stuttgart 1969.

Der vorliegende Band bringt in instruktiver Weise die Mannigfaltigkeit der Probleme der numerischen Mathematik zum Ausdruck. Ebensosehr wird deutlich, wie die Sprache der Funktionalanalysis als ordnendes und straffendes Prinzip viele Einzelsachverhalte auf ihren eigentlichen mathematischen Kerngehalt zurückführt und damit zur grösseren Übersichtlichkeit beiträgt. Der Gesichtspunkt der bestmöglichen Approximation liegt mehreren Artikeln zugrunde, und methodisch gesehen enthält der Band namhafte Beiträge zur nichtlinearen Funktionalanalysis.

Wir versuchen im folgenden die Hauptgedanken der einzelnen Artikel wiederzugeben (für die Vortragstitel sei der Leser auf die letzte Deckelseite des Heftes 5 von Band 24 dieser Zeitschrift hingewiesen): H. AMANN zeigt unter verschiedenen Voraussetzungen an die in der HAMMERSTEIN-Gleichung $u + K\,F\,u = 0$ vorkommenden Operatoren K und F die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung und stellt Iterationsverfahren zu deren näherungsweisen Berechnung auf. – R. ANSORGE: Unter gewissen Bedingungen kann die Existenz verallgemeinerter Lösungen nichtlinearer Anfangswertaufgaben aus der approximierenden Differenzengleichung gewonnen werden; Illustration an einem halblinearen Problem. – J. BLATTER definiert verallgemeinerte rationale Funktionen in $L_p(X, \mu)$ und beweist relative Kompaktheitseigenschaften der aus diesen bestehenden Menge. – B. BROSOWSKI: Nach einem Überblick über die Verallgemeinerung eines Kriteriums von KOLMOGOROFF auf die nichtlineare TSCHEBYSCHEFF-Approximation werden Kriterien für eine beste Approximierende bezüglich einer beliebigen Teilmenge eines normierten linearen Raumes aufgestellt. – F. FAZEKAS zeigt einen leicht programmierbaren vektor- und matrixalgebraischen Weg für die Maximum-Aufgabe der linearen Optimierung auf. – Das klassische Vialzentrumproblem und einige erweiterte Varianten davon (Lokalisierung auf eine gegebene Zentralkurve; besondere Annahmen über die Gewichtsverteilung) werden von F. FAZEKAS in der komplexen Zahlenebene behandelt. – H.-P. HELFRICH schlägt zur Lösung einer nichtlinearen Operatorgleichung $F(x) = 0$ ein Iterationsverfahren vor, in welchem das NEWTONsche Verfahren kombiniert wird mit dem SCHULZschen Verfahren zur iterativen Berechnung des inversen Operators eines linearen Operators. – K.-H. HOFFMANN beweist unter der Annahme der Existenz einer besten regulären TSCHEBYSCHEFF-Approximierenden für eine stetige Abbildung von einem kompakten metrischen Raum in einen Skalarproduktraum («inner product space») ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für deren Einzigkeit. – H. VAN IPEREN bestimmt für natürliche Potenzen gewisser verallgemeinerter BERNSTEIN-Operatoren besondere mit der