Aufgaben

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **25 (1970)**

Heft 3

PDF erstellt am: **12.07.2024**

Aufgaben

Aufgabe 594. Es sei V ein Rechtsvektorraum vom Range $\geqslant 4$ über dem (nicht notwendig kommutativen) Körper K. Mit $L(V)$ bezeichnen wir den Verband aller Unterräume von V, d.h. die zu V gehörige projektive Geometrie. Sind U und W Unterräume von V mit $V = U \oplus W$, so bezeichnen wir mit $\Gamma(U, W)$ die Gruppe aller Kollineationen von $L(V)$, die sowohl U als auch W punktweise festlassen. Wir sagen, dass $L(V)$ ein (U, W)-transitiver Raum ist, falls es zu zwei verschiedenen Punkten P und Q von $L(V)$ mit $P, Q \nsubseteq U, W$ und $(P + Q) \cap U \neq \{0\} \neq (P + Q) \cap W$ stets ein $\gamma \in \Gamma(U, W)$ mit $P^\gamma = Q$ gibt. Ist U ein Punkt und daher W eine Hyperebene von $L(V)$, so folgt aus der Gültigkeit des Satzes von Desargues, dass $L(V)$ ein (U, W)-transitiver Raum ist. Man zeige: In $L(V)$ gilt genau dann der Satz von Pappos, falls es zwei Unterräume U und W von V mit $V = U \oplus W$ und $r(U) > 1 < r(W)$ gibt, so dass $L(V)$ ein (U, W)-transitiver Raum ist.

H. Lüneburg, Mainz

Lösung des Aufgabenstellers: Es sei $V = U \oplus W$ und $r(U) > 1 < r(W)$. Ferner sei $\gamma \in \Gamma(U, W)$. Nach Baer, Linear Algebra and Projective Geometry (Academic Press 1952), S. 64, Lemma 2, gibt es eine lineare Abbildung σ, die in $L(V)$ die Kollineation γ induziert. Ferner gibt es nach Baer, op. cit. S. 43, Proposition 3, zwei von Null verschiedene Elemente k und l in K mit $(u + w)^\sigma = u\,k + w\,l$ für alle $u \in U$ und alle $w \in W$. Aus der Linearität von σ folgt, dass

$$u\,a\,k + w\,a\,l = (u\,a + w\,a)^\sigma = (u + w)^\sigma a = u\,k\,a + w\,l\,a$$

ist für alle $a \in K$. Hieraus folgt $a\,k = k\,a$ und $a\,l = l\,a$ für alle a, so dass k und l im Zentrum $Z\,K^*$ der multiplikativen Gruppe K^* von K liegen. Es sei nun τ die durch $(u + w)^\tau = (u + w)^\sigma l^{-1}$ erklärte Abbildung. Dann ist τ, da $l^{-1} \in Z\,K^*$ ist, ebenfalls eine lineare Abbildung von V, die überdies γ induziert. Wir können daher o.B.d.A. annehmen, dass $l = 1$ ist. Man rechnet leicht nach, dass die Abbildung $\gamma \to k$ ein Isomorphismus von $\Gamma(U, W)$ auf $Z\,K^*$ ist.

Wir nehmen nun an, dass $L(V)$ ein (U, W)-transitiver Raum ist. Es sei A ein Punkt von U und B ein Punkt von W. Ferner sei k' ein von 0 und 1 verschiedenes Element von K. Dann sind $P = (a + b)\,K$ und $Q = (a\,k' + b)\,K$ Punkte mit $P, Q \nsubseteq U, W$ und $(P + Q) \cap U = A \neq \{0\}$ sowie $(P + Q) \cap W = B \neq \{0\}$, so dass es ein $\gamma \in \Gamma(U, W)$ mit $P^\gamma = Q$ gibt. Wie wir gesehen haben, gibt es ein $k \in Z\,K^*$, so dass γ durch die vermöge $(u + w)^\tau = u\,k + w$ definierte Abbildung τ induziert wird. Hieraus folgt die Existenz eines $r \in K$ mit $a\,k + b = (a + b)^\tau = (a\,k' + b)\,r$. Weil a und b linear unabhängig sind, ist $r = 1$ und folglich $k' = k \in Z\,K^*$. Also ist $K = Z\,K$, so dass $L(V)$ nach Hilbert pappossch ist.

Es sei umgekehrt $L(V)$ pappossch. Dann ist nach dem Hilbertschen Satz $K = Z\,K$. Ferner seien U und W zwei Unterräume von V mit $V = U \oplus W$ und $r(U) > 1 < r(W)$. Schliesslich seien P und Q zwei Punkte mit $P, Q \nsubseteq U, W$ und $(P + Q) \cap U = A \neq \{0\}$ sowie $(P + Q) \cap W = B \neq \{0\}$. Dann sind A und B Punkte mit $A + B = P + Q$. Weil P und Q beide sowohl von A als auch von B verschieden sind, gibt es Vektoren a und b und ein $k \in K^*$ mit $A = a\,K$, $B = b\,K$, $P = (a + b)\,K$ und $Q = (a\,k + b)\,K$. Weil $k \in K^* = Z\,K^*$ ist, induziert die vermöge $(u + w)^\tau = u\,k + w$ definierte Abbildung τ eine Kollineation $\gamma \in \Gamma(U, W)$. Dann ist aber

$$P^\gamma = ((a + b)\,K)^\gamma = (a + b)^\tau K = (a\,k + b)\,K = Q\,,$$

so dass $L(V)$ ein (U, W)-transitiver Raum ist, q.e.d.

Aufgabe 597. Es sei G eine Gruppe und U eine Teilmenge von G, die mindestens zwei von 1 verschiedene Elemente enthält. Ist dann $U^{-1}x = U$ für alle von 1 verschiedenen $x \in U$, so ist U eine Untergruppe von G.

Heinz Lüneburg, University of Illinois, USA

Solution: It is well known that a non-empty subset U of a group G is a subgroup of G if and only if $x, y \in U$ imply $x^{-1} y \in U$. By hypothesis, there exist at least two elements a_1 and a_2 $(a_1 \neq a_2)$ in U, distinct from 1. This implies that U contains 1, since $1 = a_1^{-1} a_1 \in U^{-1} a_1 = U$. If $x, y \in U$ and $y \neq 1$, then by hypothesis $x^{-1} y \in U^{-1} y = U$. Hence, it will be sufficient to show that $x \in U$ implies $x^{-1} \in U$.

Suppose first that $x \in U$ and $x \neq a_1$. Then from $U = U^{-1} a_1$ we get $x = y^{-1} a_1$ for some $y \in U$. But $x \neq a_1$ and $x = y^{-1} a_1$ imply $y \neq 1$. Hence $x^{-1} = (y^{-1} a_1)^{-1} = a_1^{-1} y \in U^{-1} y = U$. Similarly, $x \in U$ and $x \neq a_2$ imply $x^{-1} \in U$. In particular $a_1^{-1} \in U$, and this completes the proof. JOANNA WUWER, Katowice, Poland

Weitere Lösungen sandten A. BAGER (Hjørring), P. BUNDSCHUH (Freiburg i.Br.), J. FEHÉR (Pécs, Ungarn), G. GEISE (Dresden), H. MEILI (Winterthur), O. REUTTER (Ochsenhausen), D. SVRTAN (Zagreb), R. W. VAN DER WAALL (Nijmegen).

Anmerkung der Redaktion: Die Betrachtung einer zweielementigen Teilmenge U der zyklischen Gruppe der Ordnung 3 mit $1 \in U$ zeigt, dass die Existenz zweier nichtneutraler Elemente in U für die vorliegende Aussage wesentlich ist.

Aufgabe 598. Let p be a fixed prime. Show that the integer n has the property

$$p \nmid \binom{n}{k} \qquad (0 \leqslant k \leqslant n)$$

if and only if

$$n = a\, p^s + p^s - 1 \qquad (0 \leqslant a < p;\ s \geqslant 0)\,.$$

L. CARLITZ, Duke University, USA

Lösung: In der kanonischen Zerlegung von $\binom{n}{k}$ hat p den Exponenten $\alpha = \sum_{\nu \geqq 1} e_\nu$ mit

$$e_\nu = \left[\frac{n}{p^\nu}\right] - \left[\frac{n-k}{p^\nu}\right] - \left[\frac{k}{p^\nu}\right] \geqq 0\,.$$

Für $n = a\, p^s + p^s - 1$ verschwinden die eckigen Klammern einzeln, wenn $\nu > s$, und sonst folgt $e_\nu = 0$, $1 \leqq \nu \leqq s$, aus

$$e_\nu = \left[\frac{-1}{p^\nu}\right] - \left[-\frac{k+1}{p^\nu}\right] - \left[\frac{k}{p^\nu}\right] = -1 - \left(\left[\frac{k}{p^\nu}\right] + \left[-\frac{k+1}{p^\nu}\right]\right) \leqq 1 - \frac{1}{p^\nu} < 1\,.$$

Für alle anderen $n = a\, p^s + p^s - i$, $2 \leqq i \leqq p^s$, ergibt schon $k = a\, p^s - 1$ die Abschätzung

$$\alpha \geqq e_s = \left[\frac{-i}{p^s}\right] - \left[-\frac{i-1}{p^s}\right] - \left[\frac{-1}{p^s}\right] = 1$$

und damit die Teilbarkeit von $\binom{n}{k}$ durch p. H. HARBORTH, Braunschweig

Weitere Lösungen sandten A. BAGER (Hjørring), P. BUNDSCHUH (Freiburg i.Br.), J. FEHÉR (Pécs, Ungarn), H. MEILI (Winterthur), Ž. M. MITROVIĆ (Vranje, Yugoslavia), H. G. NIEDERREITER (Wien), H. SCHEID (Mainz), W. STAHL (Karlsruhe), D. SVRTAN (Zagreb), E. TEUFFEL (Korntal), R. W. VAN DER WAALL (Nijmegen), G. WULCZYN (Lewisburg, Pa., USA).

Anmerkung der Redaktion: W. STAHL entwickelt zur Lösung der Aufgaben 595 und 598 den folgenden Hilfssatz: Es seien $n = a_0 + a_1 p + \dots + a_r p^r \geqslant k = b_0 + b_1 p + \dots + b_r p^r$; p eine Primzahl und $0 \leqslant a_i < p$, $0 \leqslant b_i < p$ $(i = 0, \dots, r)$. Dann gilt:

$$p \nmid \binom{n}{k} \Longleftrightarrow a_i \geqslant b_i \qquad (i = 0, \dots, r)\,.$$

Aufgabe 599. Es sei

$$F_s(x) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq x} (i, j)^s .$$

Dann ist

$$F_1(x) = \frac{x^2 \ln x}{2\,\zeta(2)} + O(x^2)\,, \quad F_2(x) = \frac{x^3\,\zeta(2)}{3\,\zeta(3)} + O(x^2 \ln x)\,,$$

$$F_s(s) = \frac{x^{s+1}\,\zeta(s)}{(s+1)\,\zeta\,(s+1)} + O(x^s) \quad (s > 2)\,.$$

E. Teuffel, Korntal/Stuttgart

Lösung: Es bezeichne φ die Eulersche φ-Funktion. Man überzeugt sich leicht von der Identität

$$\sum_{1 \leq i \leq n} (i, n)^s = \sum_{t/n} t^s\,\varphi\left(\frac{n}{t}\right).$$

Für $s \geqq 2$ ist

$$F_s(x) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq x} (i, j)^s = \sum_{td \leq x} t^s\,\varphi(d) = \frac{1}{s+1} \sum_{d \leq x} \left\{\left[\frac{x}{d}\right]^{s+1} + O\left(\left(\frac{x}{d}\right)^s\right)\right\}\varphi(d)$$

$$= \frac{x^{s+1}}{s+1} \sum_{d \leq x} \frac{\varphi(d)}{d^{s+1}} + O\left(x^s \sum_{d \leq x} \frac{\varphi(d)}{d^s}\right).$$

Für $s > 2$ ist die nachfolgende Reihe konvergent, und es gilt

$$\sum_{d=1}^{\infty} \frac{\varphi(d)}{d^s} = \frac{\zeta\,(s-1)}{\zeta(s)}\,,$$

folglich

$$F_s(x) = \frac{x^{s+1}\,\zeta(s)}{(s+1)\,\zeta\,(s+1)} + O(x^s)\,.$$

Für $s = 2$ ist

$$\sum_{d \leq x} \frac{\varphi(d)}{d^2} < \sum_{d \leq x} \frac{1}{d} = O(\ln x)$$

und daher

$$F_2(x) = \frac{x^3\,\zeta(2)}{3\,\zeta(3)} + O(x^2 \ln x)\,.$$

Für $s = 1$ kann ein besseres Resultat als das behauptete erhalten werden:

$$F_1(x) = \sum_{td \leq x} t\,\varphi(d) = \sum_{t \leq \sqrt{x}} t \sum_{d \leq x/t} \varphi(d) + \sum_{d \leq \sqrt{x}} \varphi(d) \sum_{\sqrt{x} < t \leq x/d} t$$

$$= \sum_{t \leq \sqrt{x}} t \sum_{d \leq x/t} \varphi(d) + \frac{x^2}{2} \sum_{d \leq \sqrt{x}} \frac{\varphi(d)}{d^2} - [\sqrt{x}] \sum_{d \leq \sqrt{x}} \varphi(d) + O(x^{3/2})\,.$$

Nach Hardy and Wright, An Introduction to the Theory of Numbers, S. 268, ist

$$\sum_{d \leq x} \varphi(d) = \frac{x^2}{2\,\zeta(2)} + O(x \ln x)$$

und daher

$$F_1(x) = \sum_{t \leq \sqrt{x}} \left\{\frac{x^2}{2\,\zeta(2)\,t} + O(x \ln x)\right\} + \frac{x}{2} \sum_{d \leq \sqrt{x}} \varphi(d) + x^2 \int_1^{\sqrt{x}} y^{-3} \sum_{d \leq y} \varphi(d)\,dy + O(x^{3/2})$$

$$= \frac{x^2}{2\,\zeta(2)} (\ln x + A) + O(x^{3/2} \ln x)$$

mit

$$A = C + \frac{1}{2} + \int_1^\infty \left(\frac{2\,\zeta(2)}{y^3} \sum_{d \leqq y} \varphi(d) - \frac{1}{y} \right) dy$$

(C: Eulersche Konstante). E. KRÄTZEL, Jena

Weitere Lösungen sandten P. BUNDSCHUH (Freiburg i. Br.) und A. UPADHYAYULA (Waltair, India).

Aufgabe 600. In O greifen drei koplanare Kräfte $\boldsymbol{OA}$, $\boldsymbol{OB}$ und $\boldsymbol{OC}$ gleicher Grösse so an, dass A, B und C das Dreieck Δ bilden. Man zeige, dass die Resultierende genau dann zu einer Seite von Δ parallel ist, wenn Δ nicht stumpfwinklig ist und die Seitenlängen des Höhenfusspunktdreiecks von Δ zudem eine arithmetische Folge (1. Ordnung) bilden.

F. LEUENBERGER, Feldmeilen

Lösung: Da die drei Vektoren $\boldsymbol{OA} = \boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{OB} = \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{OC} = \boldsymbol{c}$ den gleichen Betrag r haben, ist O der Umkreismittelpunkt von Δ, und die Resultierende $\boldsymbol{OH} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$ endigt im Höhenschnittpunkt H von Δ.

OH ist genau dann zu einer Seite von Δ, etwa (o. B. d. A.) zu BC parallel, wenn $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})\,(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = 0$ ist. Daraus ergibt sich mit $\boldsymbol{a}^2 = \boldsymbol{b}^2 = \boldsymbol{c}^2 = r^2$ und $\boldsymbol{ab} = r^2 - c^2/2$, $(c = \overline{AB})$ usw. die äquivalente Bedingung

$$2\,a^2 + b^2 + c^2 = 12\,r^2\,. \tag{1}$$

Wegen $b \leqq 2\,r$ folgt hieraus $3\,b^2 \leqq 2\,a^2 + b^2 + c^2 < 2\,a^2 + b^2 + 2\,c^2$, also $b^2 < a^2 + c^2$. Entsprechend ergeben sich aus (1) und $c \leqq 2\,r$ bzw. $a < 2\,r$ die Ungleichungen $c^2 < a^2 + b^2$ bzw. $a^2 < b^2 + c^2$. Demnach ist Δ spitzwinklig. Trägt man in (1) die Identität $r^2 = (a\,b\,c)^2/[2\,(a^2\,b^2 + b^2\,c^2 + c^2\,a^2) - (a^4 + b^4 + c^4)]$ ein, dann erhält man nach Multiplikation mit [...] und einfacher Umformung die zu (1) äquivalente Bedingung

$$(2\,a^4 - b^4 - c^4 - a^2\,b^2 + 2\,b^2\,c^2 - c^2\,a^2)\,(b^2 + c^2 - a^2) = 0\,. \tag{2}$$

Das Höhenfusspunktdreieck von Δ hat die Seitenlängen $x_a = a\,(b^2 + c^2 - a^2)/2\,b\,c$, $x_b = b\,(c^2 + a^2 - b^2)/2\,c\,a$, $x_c = c\,(a^2 + b^2 - c^2)/2\,a\,b$. Diese bilden in der Reihenfolge x_b, x_a, x_c genau dann eine arithmetische Folge 1. Ordnung, wenn $x_b + x_c - 2\,x_a = 0$ ist. Nach Einsetzen der angegebenen Werte und Multiplikation mit $2\,a\,b\,c$ ergibt sich hieraus die äquivalente Bedingung

$$2\,a^4 - b^4 - c^4 - a^2\,b^2 + 2\,b^2\,c^2 - c^2\,a^2 = 0\,. \tag{3}$$

Der Vergleich von (2) und (3) bestätigt die Richtigkeit der in der Aufgabe ausgesprochenen Behauptung. O. REUTTER, Ochsenhausen

Weitere Lösungen sandten C. BINDSCHEDLER (Küsnacht), J. FEHÉR (Pécs, Ungarn), G. GEISE (Dresden), W. JÄNICHEN (Berlin), J. QUONIAM (Saint-Etienne), K. SCHULER (Rottweil), D. SVRTAN (Zagreb).

Anmerkung der Redaktion: J. QUONIAM erwähnt in seiner Lösung den folgenden Sachverhalt: Ist die Eulersche Gerade von Δ parallel zur Seite BC, dann gilt $\tan B \cdot \tan C = 3$ (H. S. M. COXETER, Introduction to Geometry, Wiley 1961, p. 18, Exercise 9).

Aufgabe 601. Nach SURYANARAYANA (vgl. El. Math. *24*, 16–17 (1969)) heisst eine natürliche Zahl n superperfekt, wenn $\sigma(\sigma(n)) = 2\,n$ gilt. Dabei bedeutet $\sigma(k)$ die Summe aller Teiler der natürlichen Zahl k. Man beweise: Ist $n = p^2$, p eine ungerade Primzahl, so ist n nicht superperfekt. P. BUNDSCHUH, Freiburg i. Br.

Lösung: Sei $\sigma(p^2+p+1) = 2p^2$ und $p^2+p+1 = \prod_{i=1}^{k} p_i^{a_i}$, $p_i > 2$ prim, $a_i \geqslant 1$, also $\prod_{i=1}^{k} \frac{p_i^{a_i+1}-1}{p_i-1} = 2p^2$. Wegen $\frac{p_i^{a_i+1}-1}{p_i-1} > 2$ ist $k \leqslant 2$.

$k = 1$: dann ist (1) $p^2+p+1 = p_1^{a_1}$, (2) $p_1^{a_1+1} - 1 = 2p^2(p_1-1)$; daraus $(p^2+p+1)\,p_1 - 1 = 2p^2(p_1-1)$, also $p_1 \equiv 1(p)$ und damit $p_1 \geqq p+1$. Wegen $(p+1)^2 > p^2+p+1$ ist $a_1 = 1$, also (1′) $p^2+p+1 = p_1$, (2′) $p_1 + 1 = 2p^2$. Daraus $p^2 - p - 2 = 0$, also $p = 2$, Widerspruch.

$k = 2$: dann ist (3) $p^2+p+1 = p_1^{a_1} p_2^{a_2}$, (4) $p_1^{a_1+1} - 1 = p(p_1-1)$, (5) $p_2^{a_2+1} - 1 = 2p(p_2-1)$, also $p_1^{a_1+1} \equiv p_2^{a_2+1} \equiv 1(p)$. Multipliziert man (4) und (5) miteinander und ersetzt man $p_1^{a_1} p_2^{a_2}$ nach (3), so ergibt sich

$$(p^2+p+1)\,p_1 p_2 = 2p^2(p_1-1)(p_2-1) + p_1^{a_1+1} + p_2^{a_2+1} - 1\,.$$

Daher $p_1 p_2 \equiv 1(p)$, also $p_1 p_2 \geqslant p+1$. Wie oben folgt, dass mindestens ein $a_i = 1$. Ist $a_1 = 1$, so (4′) $p_1 + 1 = p$, Widerspruch zu $p_1 > 2$. Ist $a_2 = 1$, so (5′) $p_2 + 1 = 2p$, also (3′) $p^2+p+1 = p_1^{a_1}(2p-1)$. Aus $4(p^2+p+1) = (2p-1)(2p+3) + 7$ folgt $(2p-1) \mid 7$, also $p = 1$ oder 4, Widerspruch, w.z.b.w. H. G. Niederreiter, Wien

Weitere Lösungen sandten A. Bager (Hjørring), D. Bode (Braunschweig), J. Fehér (Pécs, Ungarn), H. Meili (Winterthur), H. Meyer (Birkerød, Danmark), Ž. M. Mitrović (Vranje, Yugoslavia), K. Schuler (Rottweil), Edith V. Sloan (Greensboro, N.C., USA), E. Teuffel (Korntal), E. Vegh (Washington, D.C., USA), R. W. van der Waall (Nijmegen).

Anmerkung der Redaktion: Es ist zu beachten, dass eine ungerade superperfekte natürliche Zahl notwendig eine Quadratzahl ist (H.-J. Kanold, El. Math. *24*, 61–62 (1969)). Eine weitere Frage aus diesem Problemkreis ist

Problem 601 A: If n is an odd super perfect number, is it true that $(n, \sigma(n)) = 1$?

D. Suryanarayana, Waltair/India

Die Antwort ist dem Autor unbekannt.

Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben erbeten bis 10. Januar 1971, wenn möglich in Maschinenschrift.

Aufgabe 622. If a, b, c are the sides, h_a, h_b, h_c the altitudes, r_a, r_b, r_c the exradii, and s the semiperimeter of a triangle ABC, prove that

$$\frac{r_a}{h_a} + \frac{r_b}{h_b} + \frac{r_c}{h_c} \geqslant 3; \qquad \frac{a}{s-a} + \frac{b}{s-b} + \frac{c}{s-c} \geqslant 6\,,$$

with equalities if and only if the triangle is equilateral.

Ž. M. Mitrović, Vranje/Yugoslavia

Aufgabe 623. Sind K die Summe der sechs Kantenquadrate eines Tetraeders, F das Sechzehnfache der Quadratsumme der Inhalte der vier Oberflächendreiecke und V der Tetraederinhalt, so gilt

$$V \leqslant \frac{1}{24}\sqrt{\frac{F^2}{3K}} \leqslant \frac{1}{9}\sqrt[4]{3\left(\frac{F}{16}\right)^3} \leqslant \frac{1}{24}\sqrt{\frac{K^3}{27}}\,,$$

wobei die Gleichheitszeichen genau für das reguläre Tetraeder zutreffen.

W. Jänichen, Berlin

Aufgabe 624. f und g seien zwei beliebige zahlentheoretische Funktionen. Die zahlentheoretische Funktion λ_k werde für $k = 2, 3, \ldots$ erklärt durch (1) $\lambda_k(1) = 1$, (2) λ_k ist multiplikativ, (3) für Primzahlen p und ganze Zahlen a, b mit $a \geqslant 0$, $0 \leqslant b < k$ ist

$$\lambda_k(p^{ak+b}) = \begin{cases} +1 \text{ für } b = 0\,, \\ -1 \text{ für } b = 1\,, \\ 0 \text{ für } 2 \leqslant b < k\,. \end{cases}$$

Weiterhin sei $q_k(n)$ gleich 0, falls n durch die k-te Potenz ($k \geqslant 2$) einer Primzahl teilbar ist, andernfalls gleich 1. Man zeige: Sind f und g durch

$$g(n) = \sum_{t \mid n} \lambda_k(t)\, f\left(\frac{n}{t}\right)$$

miteinander verknüpft, so gilt auch

$$f(n) = \sum_{t \mid n} q_k(t)\, g\left(\frac{n}{t}\right)$$

und umgekehrt.

E. Krätzel, Jena

Aufgabe 625. Démontrer d'une façon élémentaire qu'il existe une infinité de nombres naturels qui sont, de deux façons au moins, produits de deux nombres triangulaires aussi grands que l'on veut.

W. Sierpiński †, Varsovie

Zum Gedenken an W. Sierpiński lassen wir zwei von ihm stammende ungelöste Probleme folgen:

Problem 625 A. Existe-t-il des nombres triangulaires qui sont, de deux façons au moins, produits de deux nombres triangulaires > 1 ? Le nombre de tels nombres est-il fini ?

W. Sierpiński †, Varsovie

Problem 625 B. Existe-t-il pour tout nombre naturel m un nombre naturel qui est, de m façons au moins, produit de deux nombres triangulaires > 1 ?

W. Sierpiński †, Varsovie

Nachruf

Waclaw Sierpiński (1882–1969)

C'est avec une profonde tristesse que nous avons appris le décès survenu à Varsovie le 21 octobre 1969 du grand savant polonais, Monsieur Waclaw Sierpiński, ami et collaborateur des *Elemente der Mathematik* qui a posé de nombreux et intéressants problèmes aux lecteurs de cette revue et qui y a publié, durant les années 1950–1968, 14 articles scientifiques, dont trois consacrés à la théorie des ensembles et 11 traitant de questions élémentaires de la théorie des nombres.

Le Professeur Sierpiński est né à Varsovie le 14 mars 1882. Il fit ses études secondaires au gymnase de cette ville, puis fit ses études universitaires à l'Université russe de Varsovie où il eut pour professeur un grand spécialiste russe de la théorie des nombres Voronoï et obtint en 1904 le grade de «candidat ès sciences mathématiques». Il poursuivit ensuite ses études à l'Université polonaise de Cracovie qui lui décerna le grade de Dr en philosophie en 1906. C'est aussi l'année où il publie son premier travail mathématique. En 1908 il est habilité au titre de privat-docent à l'Université de Lwow et en 1910, à l'âge de 28 ans, il est nommé professeur extraordinaire à l'Université de Lwow, poste qu'il conserve jusqu'en 1914. La première guerre mondiale l'oblige de s'éloigner du front et il se retire d'abord à Viatka puis a Moscou où il se lie d'amitié avec le grand mathématicien russe Nicolas Lusin et poursuit assiduement ses travaux de recherches tout en donnant des