

**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik  
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft  
**Band:** 25 (1970)  
**Heft:** 5

**Artikel:** Die Hexaeder und Tetraeder im Dodekaeder  
**Autor:** Hohenberg, Fritz  
**DOI:** <https://doi.org/10.5169/seals-27356>

### **Nutzungsbedingungen**

Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. [Mehr erfahren](#)

### **Conditions d'utilisation**

L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. [En savoir plus](#)

### **Terms of use**

The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. [Find out more](#)

**Download PDF:** 04.07.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, <https://www.e-periodica.ch>**

# ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik*

*und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts*

Publiziert mit Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds  
zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung

El. Math.

Band 25

Heft 5

Seiten 97-120

10. September 1970

## Die Hexaeder und Tetraeder im Dodekaeder

### 1. Einleitung

Die 60 Diagonalen der Seitenflächen eines regulären Pentagondodekaeders  $\Pi$  bilden die Kanten von 5 Würfeln. Die Diagonalen der Seitenflächen jedes dieser Würfel bilden zwei Tetraeder, die man als «linkes» und «rechtes» Tetraeder zu unterscheiden pflegt. Aus Ecken von  $\Pi$  lassen sich 10 Tetraeder bilden, 5 linke und 5 rechte. Durch Drehungen, die  $\Pi$  in sich überführen, geht ein linkes Tetraeder in ein linkes über, ein rechtes in ein rechtes.

Als Vereinigungsmenge der 5 Würfel oder der 10 Tetraeder oder der 5 linken (oder rechten) Tetraeder erhält man komplizierte (nichtkonvexe) Polyeder. Zu klareren Ergebnissen und deutlicheren Figuren gelangt man, wie hier gezeigt werden soll, wenn man die Würfel und Tetraeder als Stabmodelle ihrer Kanten auffasst, alle Schnittpunkte und Verbindungsebenen von Kanten bestimmt und diese Punkte und Ebenen zu mehreren konvexen Polyedern zusammenfasst.

Die Würfelkanten und die Tetraederkanten bilden Geradensysteme, die die erweiterte Ikosaedergruppe gestatten. Geradensysteme, die aus einer Geraden beliebiger Lage durch eine erweiterte Polyedergruppe erzeugt werden, werden in einer späteren Arbeit untersucht.

### 2. Die Schnittpunkte von Würfelkanten und von Tetraederkanten

2.1. Zwei Würfel im Dodekaeder  $\Pi$  haben immer zwei Gegenecken von  $\Pi$  gemein. Figur 1<sup>1)</sup> zeigt  $\Pi$  im Normalriss (Grundriss) in Richtung der (lotrechten) Eckenachse  $0\bar{0}$  von  $\Pi$ , ferner die Würfel  $0\bar{6}\bar{7}\bar{3}\bar{7}\bar{3}\bar{0}\bar{6}$  (einfache dünne Linien) und  $0\bar{9}\bar{8}\bar{2}\bar{8}\bar{2}\bar{0}\bar{9}$  (dünne Doppellinien). Die Würfelkanten  $\bar{7}\bar{3}$  und  $\bar{8}\bar{2}$  schneiden sich in I,  $\bar{6}\bar{3}$  und  $\bar{9}\bar{2}$  in II,  $\bar{6}\bar{7}$  und  $\bar{9}\bar{8}$  in III. Drehungen um  $0\bar{0}$  durch Vielfache von  $60^\circ$  ergeben in Figur 1 daraus die Normalrisse von je 5 weiteren Schnittpunkten I, II, III. Führt man dies für die 10 Paare von Würfeln im Dodekaeder  $\Pi$  durch, so ergeben sich je 60 Punkte I, II, III.

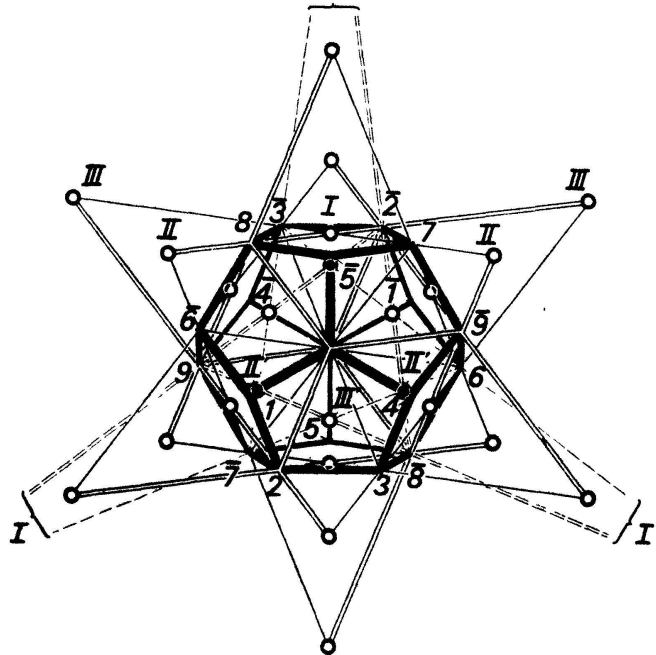
2.2. Zwei linke (oder auch zwei rechte) Tetraeder gehören verschiedenen Würfeln an, sie gehen auseinander durch eine Drehung hervor und ihre Kanten haben keinen Schnittpunkt (auch nicht in einer Ecke von  $\Pi$ ). Die Kanten eines linken und eines rechten Tetraeders, die demselben Würfel angehören, schneiden sich in den Mittelpunkten der Seitenflächen dieses Würfels.

<sup>1)</sup> Vom Betrachter weglauende Dodekaederkanten wurden in bekannter Weise keilförmig gezeichnet. Wo eine Kante im Bild von einer anderen Kante überkreuzt wird, wurde sie in der Zeichnung unterbrochen. Aus Platzmangel sind in Figur 1 und Figur 2a,b nicht alle Ecken von  $\Pi$  bezeichnet. In Figur 2a gelten dieselben Bezeichnungen wie in Figur 2c, in Figur 2b dieselben wie in Figur 1.

Ein linkes und ein rechtes Tetraeder, die nicht demselben Würfel angehören, haben eine Ecke von  $\Pi$  gemein, ferner die Ebene, in der die gegenüberliegenden Seitenflächen liegen. In Figur 1 bilden die Dreiecke  $\bar{3}\bar{7}\bar{6}$  (einfach gestrichelte Linien) und  $\bar{2}\bar{8}\bar{9}$  (gestrichelte Doppellinien) zusammen mit der obersten Ecke 0 von  $\Pi$  zwei solche Tetraeder. Ihre Seitenflächen  $\bar{3}\bar{7}\bar{6}$  und  $\bar{2}\bar{8}\bar{9}$  in der Ebene  $\bar{3}\bar{2}\bar{6}\bar{8}\bar{7}\bar{9}$  ergeben 9 Schnittpunkte von Kanten beider Tetraeder, nämlich je 3 Punkte I', II', III'. Sie liegen in den 3 durch die Eckenachse  $0\bar{0}$  gehenden Symmetrieebenen von  $\Pi$ . Insgesamt gibt es je 60 Punkte I', II', III'.

•2.3.  $\Pi$  habe die Kantenlänge  $a$ ; dann haben die Würfel die Kantenlänge  $d = a(1 + \sqrt{5})/2$ , die Tetraeder die Kantenlänge  $d\sqrt{2}$ .

Wir zeigen nun, dass die Punkte I in I' durch eine Streckung aus dem Mittelpunkt M von  $\Pi$  übergehen, ebenso die Punkte II in II', und ebenso die Punkte III in III'. Die Ebene  $9\bar{2}\bar{2}$  enthält M (auf  $\bar{2}\bar{2}$ ), auf 92 einen Punkt I, auf  $9\bar{2}$  einen Punkt I'. M, I, I' liegen in Figur 1 und, da die Ebene  $9\bar{2}\bar{2}$  nicht als Gerade erscheint, auch im Raum auf einer Geraden. Aus ähnlichen Dreiecken folgt  $\lambda_1 = |MI:MI'| = (2a - d):d = \sqrt{5} - 2$ . Die Ebene  $9\bar{9}\bar{8}$  enthält M (auf  $9\bar{9}$ ), auf  $\bar{8}\bar{9}$  einen Punkt II, auf  $\bar{8}\bar{9}$  einen Punkt II'. Es folgt  $\lambda_2 = |MII:MI I'| = (2a + d):d = \sqrt{5}$ . Die Ebene  $8\bar{8}\bar{9}$  enthält M (auf  $8\bar{8}$ ), auf 89 einen Punkt III, auf  $\bar{8}\bar{9}$  einen Punkt III'. Es folgt  $\lambda_3 = |MIII:MI I I'| = (a + 2d):a = \sqrt{5} + 2$ . (Es ist  $\lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0$  und  $\lambda_1\lambda_3 = 1$ .)



Figur 1

### 3. Die Polyeder der Schnittpunkte

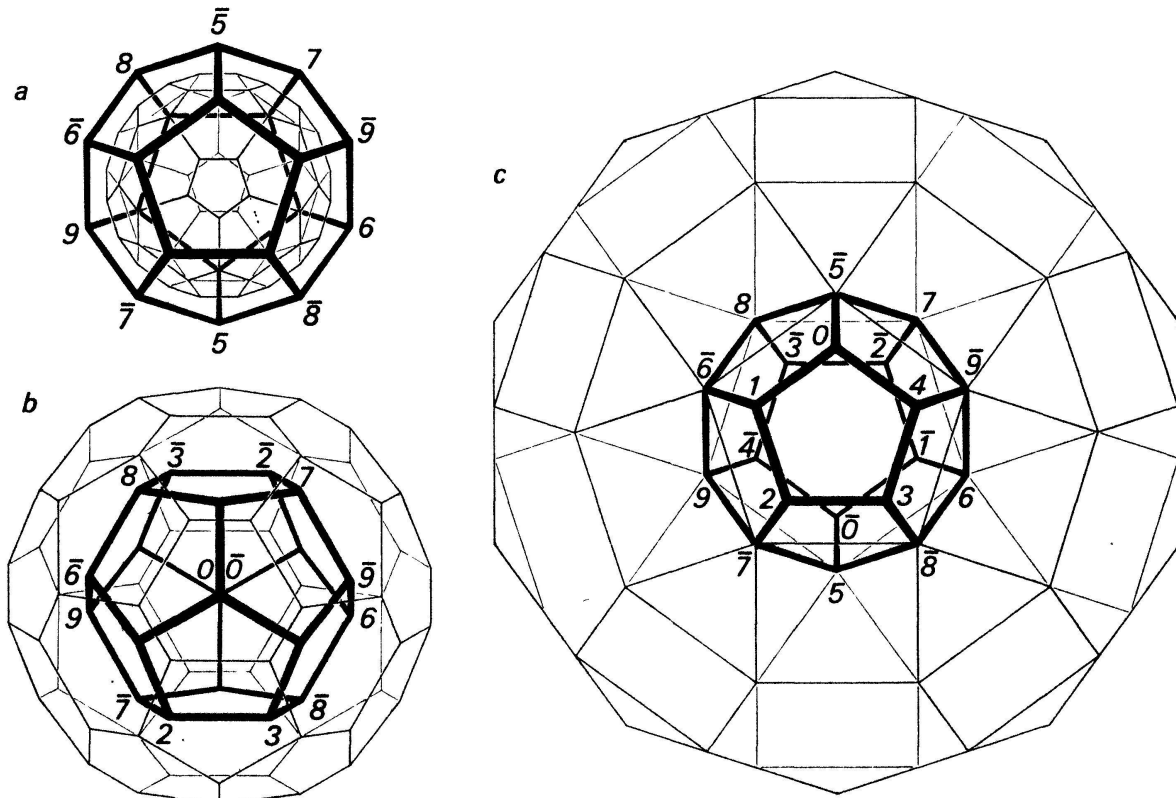
3.1. Bei den 5 Würfeln lässt sich aus den 60 Kantenschnittpunkten I ein Polyeder  $\Pi_1$  (Fig. 2a) bilden, aus den 60 Punkten II ein Polyeder  $\Pi_2$  (Fig. 2b), aus den 60 Punkten III ein Polyeder  $\Pi_3$  (Fig. 2c)<sup>2)</sup>.

<sup>2)</sup>  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3$  sind in Figur 2a, b, c als Drahtmodelle gezeichnet, die dem Betrachter abgewandte Hälfte mit ganz dünnen Strichen, die zugewandte Hälfte etwas stärker. In Figur 2a und 2c decken sich die Bilder von 10 Ecken der oberen und 10 Ecken der unteren Hälfte von  $\Pi_1$  bzw.  $\Pi_3$ . In Figur 2b ist dies bei 6 Ecken von  $\Pi_2$  der Fall. In Figur 2c besteht der Umriss von  $\Pi_3$  aus den Normalrissen von 10 Quadraten von  $\Pi_3$ .

$\Pi_1$  ist begrenzt von 12 Fünfecken (Seitenlänge  $2a - d$ ), gebildet aus den Diagonalen je einer Seitenfläche von  $\Pi$ , und 20 halbregulären Sechsecken (Innenwinkel  $120^\circ$ , Seitenlängen abwechselnd  $2a - d$  und  $d - a$ ).  $\Pi_2$  ist begrenzt von 12 Fünfecken (Seitenlänge  $a$ ) und 20 halbregulären Sechsecken (Innenwinkel  $120^\circ$ , Seitenlängen abwechselnd  $a$  und  $d - a$ ). Die Sechsecke von  $\Pi_1$  und  $\Pi_2$  sind wegen  $(2a - d) : (d - a) = (d - a) : a$  ähnlich, jedoch liegen bei  $\Pi_1$  die Fünfecke den kürzeren Sechseckseiten  $2a - d$  an, bei  $\Pi_2$  den längeren Sechseckseiten  $a$ <sup>3)</sup>.  $\Pi_3$  (Fig. 2c) ist ein Archimedisches Polyeder mit der Kantenlänge  $d$ , begrenzt von 20 gleichseitigen Dreiecken, 30 Quadraten und 12 Fünfecken<sup>4)</sup>.

3.2. Bei den 10 Tetraedern lässt sich aus den 60 Kantenschnittpunkten  $I'$  ein Polyeder  $\Pi'_1$  bilden, aus den 60 Punkten  $II'$  ein Polyeder  $\Pi'_2$ , aus den 60 Punkten  $III'$  ein Polyeder  $\Pi'_3$ . Nach 2.3 geht  $\Pi'_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) durch  $\lambda_i$ -fache Streckung aus  $M$  in  $\Pi_i$  über.  $\Pi'_1$  (Fünfeckseite  $d$ , Sechseckseiten  $d$  und  $d + a$ ),  $\Pi'_2$  (Fünfeckseite  $a/\sqrt{5}$ , Sechseckseiten  $a/\sqrt{5}$  und  $(d - a)/\sqrt{5}$ ),  $\Pi'_3$  (Kantenlänge  $2a - d$ ) sind in Figur 2a, b, c nicht gezeichnet. Wegen  $\lambda_1 \lambda_3 = 1$  führt die Streckung, durch die  $\Pi'_1$  in  $\Pi_1$  übergeht, zugleich  $\Pi_3$  in  $\Pi'_3$  über. Überdies zeigt sich: Die 60 Würfelkanten sind die Seiten der 12 Fünfecke von  $\Pi_1$ , die 60 Tetraederkanten sind die Diagonalen der 30 Quadrate von  $\Pi'_3$ .

Zu den Schnittpunkten von Tetraederkanten gehören (ausser den Ecken von  $\Pi$ ) noch die Schnittpunkte der Kanten je zweier Tetraeder, die einem und demselben Würfel eingeschrieben sind. Diese Schnittpunkte sind die Mittelpunkte der Würfel-



Figuren 2a, b, c

<sup>3)</sup> Obwohl man die Ecken von  $\Pi_1$  und  $\Pi_2$  einander so zuordnen kann, dass entsprechende Kanten parallel sind und entsprechende Flächen parallel und ähnlich, sind  $\Pi_1$  und  $\Pi_2$  nicht ähnlich.

<sup>4)</sup> Damit ist wohl die einfachste Art gefunden, wie dieses Archimedisches Polyeder bei gegebener Kantenlänge  $d$  aus einem Dodekaeder konstruiert werden kann.

flächen und sie bilden ein Oktaeder. Die Eckenachsen des Oktaeders gehen verlängert durch Kantenmittelpunkte von  $\Pi$ , und diese bilden ein Ikosidodekaeder. Daher bilden die Kantenschnittpunkte von Tetraedern, die einem und demselben Würfel eingeschrieben sind, fünf Oktaeder, und deren Ecken lassen sich zu einem Ikosidodekaeder  $\Pi'_4$  (Umkugelradius  $d/2$ ) vereinen.

#### 4. Teilfiguren, die eine Diedergruppe gestatten

4.1. Die oberste Seitenfläche  $\varepsilon_{11}$  von  $\Pi_1$  in Figur 2a enthält 5 Würfelkanten; ihre Verlängerungen bis zu den Ecken von  $\Pi$  sind gepunktet. In der untersten Seitenfläche  $\varepsilon_{12}$  von  $\Pi_1$  liegt ein zweites Fünfeck von Würfelkanten. In Figur 2b liegen die Würfelkanten  $\bar{7}8, \bar{6}2, \bar{3}9$  in einer Ebene  $\varepsilon_{21}$ , sie schneiden sich (gepunktet verlängert) in 3 Ecken von  $\Pi_2$ . Symmetrisch zu  $\varepsilon_{21}$  bezüglich  $M$  liegt die Ebene  $\varepsilon_{22}$  mit den Würfelkanten  $\bar{7}8, \bar{6}2, \bar{3}9$ , die sich ebenfalls in 3 Ecken von  $\Pi_2$  schneiden. In Figur 2c liegen die Würfelkanten  $\bar{5}6, \bar{6}7, \bar{7}8, \bar{8}9, \bar{9}5$  in einer Ebene  $\varepsilon_{31}$ , sie schneiden sich (gepunktet verlängert) in 5 Ecken von  $\Pi_3$ . Symmetrisch zu  $\varepsilon_{31}$  bezüglich  $M$  liegt die Ebene  $\varepsilon_{32}$  mit den Würfelkanten  $56, 67, 78, 89, 95$ . Die Fünfecke in  $\varepsilon_{11}$  und  $\varepsilon_{12}$  bilden zusammen eine Teilfigur  $\pi_1$  der Ecken I von  $\Pi_1$ , die Dreiecke in  $\varepsilon_{21}$  und  $\varepsilon_{22}$  eine Teilfigur  $\pi_2$  der Ecken II und  $\Pi_2$ , die Fünfecke in  $\varepsilon_{31}$  und  $\varepsilon_{32}$  eine Teilfigur  $\pi_3$  der Ecken III von  $\Pi_3$ .

4.2. Die Streckung aus  $M$ , die  $\Pi_1$  in  $\Pi'_1$  überführt, führt die 10 Punkte I von  $\pi_1$  in 10 Punkte I' über, von denen in Figur 2a je einer unter  $\bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}$ , je einer ober 5, 6, 7, 8, 9 liegt. Diese 10 Punkte sind die Aussenecken des aus Tetraederkanten bestehenden Diagonalenzuges  $0\bar{2}\bar{4}\bar{1}\bar{3}0\bar{2}\bar{4}\bar{1}\bar{3}0$  von  $\Pi$ , den wir mit  $\pi'_1$  bezeichnen (obwohl er nicht durch Streckung aus  $\pi_1$  hervorgeht). Die Streckung aus  $M$ , die  $\Pi_2$  in  $\Pi'_2$  überführt, führt die 6 Punkte II von  $\pi_2$  in 6 Punkte II' über, von denen in Figur 2b je einer unter  $\bar{4}, \bar{5}, \bar{1}$ , je einer ober  $\bar{4}, \bar{5}, \bar{1}$  liegt. Diese Punkte II' ergeben reihum verbunden das aus den Tetraederkanten  $\bar{6}2, \bar{3}9, \bar{7}8, 62, 39, \bar{7}8$  gebildete Sechseck, das wir  $\pi'_2$  nennen. Die Streckung aus  $M$ , die  $\pi_3$  in  $\pi'_3$  überführt, führt die 10 Punkte III von  $\pi_3$  in 10 Punkte III' über, von denen in Figur 2c je einer unter  $0, 1, 2, 3, 4$ , je einer ober  $0, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}$  liegt. Diese 10 Punkte III' sind die Innenecken des aus Tetraederkanten gebildeten Diagonalenzuges  $\bar{5}6\bar{7}8\bar{9}5\bar{6}7\bar{8}9\bar{5}$  von  $\Pi$ , den wir  $\pi'_3$  nennen.

4.3. Das Fünfeckpaar  $\pi_1$ , das Dreieckpaar  $\pi_2$  und das Fünfeckpaar  $\pi_3$  von Würfelkanten, ebenso das unebene reguläre Zehneck  $\pi'_1$ , das unebene reguläre Sechseck  $\pi'_2$  und das unebene reguläre Sternzehneck  $\pi'_3$  von Tetraederkanten gestatten je eine in der Ikosaedergruppe enthaltene Diedergruppe. (Die Hauptachse erscheint in Figur 2 als Punkt.)

Das Dodekaeder  $\Pi$  besitzt 6 fünfzählige und 10 dreizählige Achsen, daher lassen sich die Würfelkanten und Tetraederkanten auf je 6 Figuren  $\pi_1, \pi_3$  bzw.  $\pi'_1, \pi'_3$  oder auf 10 Figuren  $\pi_2$  bzw.  $\pi'_2$  verteilen.

#### 5. Die Polyeder der Verbindungsebenen

Jede Ecke der Polyeder  $\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi'_1, \Pi'_2, \Pi'_3, \Pi'_4$  ist Schnittpunkt zweier Würfel- bzw. Tetraederkanten. Deren Verbindungsebenen bilden Polyeder, die wir  $\bar{\Pi}_1, \bar{\Pi}_2, \bar{\Pi}_3, \bar{\Pi}'_1, \bar{\Pi}'_2, \bar{\Pi}'_3, \bar{\Pi}'_4$  nennen.

5.1. Die Fünfecke von  $\bar{\Pi}_1$  bestehen aus Würfelkanten in den Seitenflächen von  $\Pi$ , daher ist  $\bar{\Pi}_1 = \Pi$ . Auch  $\bar{\Pi}_3$  ist ein Dodekaeder, denn  $\varepsilon_{31}$  ist Verbindungsebene von Würfelkanten in 5 Schnittpunkten III und  $\varepsilon_{31}$  ist zur Seitenfläche 01234 von  $\Pi$  parallel.  $\bar{\Pi}_3$  geht aus  $\Pi$  durch  $(\sqrt{5} - 2)$ -fache Streckung aus  $M$  hervor.

5.2. In allen 9 in Figur 1 enthaltenen Schnittpunkten I', II', III' von Tetraederkanten ist deren Verbindungsebene die Ebene  $\bar{3}2\bar{6}\bar{8}\bar{7}9$ . Diese Ebene ist zugleich die Ebene  $\varepsilon_{22}$  von Figur 2b, sie enthält die Würfelkanten  $\bar{3}9$ ,  $\bar{7}8$ ,  $\bar{6}2$ , die sich in 3 Ecken II von  $\Pi_2$  schneiden. Daher sind  $\bar{\Pi}_2$ ,  $\bar{\Pi}'_1$ ,  $\bar{\Pi}'_2$ ,  $\bar{\Pi}'_3$  ein und dasselbe Ikosaeder (Mittelpunkt  $M$ , Inkugelradius = Inkugelradius der Tetraeder =  $d/2\sqrt{3}$ ). *Dieses Ikosaeder ist die Durchschnittsmenge der zehn Tetraeder im Dodekaeder.*

5.3. Die Ebenen von  $\bar{\Pi}'_4$  bilden die Seitenflächen der 5 Würfel.  $\bar{\Pi}'_4$  entsteht aus  $\Pi'_4$  durch Polarisieren an der Inkugel der 5 Würfel, ist also ein Rhombentriakontaeder (Mittelpunkt  $M$ , Inkugelradius =  $d/2$ ). *Dieses Rhombentriakontaeder ist die Durchschnittsmenge der fünf Würfel im Dodekaeder.*

FRITZ HOHENBERG, Graz

## Randomly Traversable Graphs

### 1. Introduction

A graph  $G$  is *eulerian* if it possesses a circuit containing all vertices and edges of  $G$ . These graphs are named for LEONHARD EULER [1], who encountered them while giving a solution to the Königsberg Bridge Problem. It is well known that a graph is eulerian if and only if it is connected and each of its vertices is even.

Similar to the eulerian graphs are the traversable graphs. A graph  $G$  is *traversable* if it possesses an open trail containing all vertices and edges of  $G$ . Traversable graphs are characterized (see [2], p. 65) by the properties of being connected and containing exactly two odd vertices. It is an elementary fact that every graph has an even number of odd vertices. A connected graph  $G$  with odd vertices is called *n-traversable* if there exist  $n$  open trails but no fewer which partition the edge set of  $G$ . Hence the 1-traversable graphs and the traversable graphs are identical. It follows (see [2], p. 65) that a connected graph  $G$  is *n-traversable*,  $n \geq 1$ , if and only if  $G$  has exactly  $2n$  odd vertices.

In [3] ORE introduced an interesting class of eulerian graphs. An eulerian graph  $G$  is *randomly eulerian from a vertex  $v$*  of  $G$  if the following procedure always results in an eulerian circuit of  $G$ : Begin a trail at  $v$  by choosing any edge incident with  $v$ . Next (and at each step thereafter), the trail is continued by selecting any edge not already chosen which is adjacent with the edge most recently selected. The process terminates when no such edge is available. Equivalently, a graph  $G$  is randomly eulerian from  $v$  if every trail of  $G$  beginning at  $v$  can be extended to an eulerian circuit of  $G$ .

It is the object of this paper to study eulerian graphs which are randomly eulerian from one or more of their vertices and to extend this concept to traversable graphs and to *n-traversable* graphs in general.