Aufgaben

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **25 (1970)**

Heft 6

PDF erstellt am: **12.07.2024**

We find

$$s + \sum_{i=s+1}^{h} (dl_i + 1) = N \,, \quad \text{or} \quad d\left(\sum_{i=s+1}^{h} l_i\right) + h = N \,. \tag{1}$$

Let now N be odd, then $\chi_i \neq \overline{\chi_i}$, for all non-trivial simple characters. Here $\overline{\chi_i}$ means the complex conjugate character of χ_i. $\overline{\chi_i}$ is also a simple character. The degrees of χ_i and $\overline{\chi_i}$ are the same. Therefore we can collect up all the $n_i \neq 1$, in pairs of equal value, and we have:

$$\sum_{i=s+1}^{h} l_i \equiv 0 \pmod 2 \tag{2}$$

(1) and (2) together gives $N \equiv h \pmod{2\,d}$.

If now N is even and $(N, 3) = 1$, then $n_i^2 \equiv 1 \pmod 3$, by virtue of $3 \nmid n_i \mid N$. It follows that

$$N = s + \sum_{i=s+1}^{h} n_i^2 \equiv s + (h - s) = h \pmod 3 \qquad \text{q.e.d.}$$

Proof of Theorem 2: Let D_n be the dihedral-group of order $N = 2\,n$, $n \equiv 0 \pmod 2$. If theorem 2 would not be true, then $N \equiv h \pmod x$ or $4 + 4\,t \equiv 4 + t \pmod x$. Here t denotes the number of all irreducible representations of degree 2; the irreducible ones remaining are the four representations of degree 1 ([3], p. 180). Choose $t = 1$ (the group D_4), then $3 \equiv 0 \pmod x$, or $x = 3$. But the group A_4 with $4 = h \equiv N = 12 \pmod 3$ gives a contradiction. – q.e.d.

R. W. van der Waall, Nijmegen

REFERENCES

[1] Burnside, W., *Theory of Groups*, 2nd edition (Cambridge 1911), p. 295.
[2] Hirsch, K. A., *On a Theorem of Burnside*, Quart. J. Math. Oxford (2) *1*, 97–99 (1950).
[3] Speiser, A., *Die Theorie der Gruppen von endlicher Ordnung*, 4. Aufl. (Birkhäuser-Verlag, Basel 1956).

Aufgaben

Aufgabe 609. In der Gaußschen Zahlenebene werde dem «Punkt» $z = x + i\,y$ der Punkt

$$z' = \frac{\alpha\,z + \beta}{\gamma\,z - \alpha}\,, \quad \gamma \neq 0; \qquad \alpha, \beta, \gamma \text{ komplexe Zahlen}$$

zugeordnet. Welches ist die Bahn eines variablen Punktes, dessen Bewegung in jedem Moment auf den jeweils zugeordneten Punkt hin gerichtet ist?

C. Bindschedler, Küsnacht

Lösung des Aufgabenstellers: Der Spezialfall $\Delta = \alpha^2 + \beta\,\gamma = 0$, also z' konstant, ist trivial. Ist $\Delta \neq 0$, so geht die Transformation $z \to z'$ durch die Substitution $z = (1/\gamma)\,(\alpha + \delta\,\zeta)$, $z' = (1/\gamma)\,(\alpha + \delta\,\zeta')$ über in $\zeta' = 1/\zeta$, wobei $\delta^2 = \alpha^2 + \beta\,\gamma$ gelte.

Die Koordinaten der Punkte ζ und ζ', d.h. von $P(x, y)$ und P' $(x' = x/(x^2 + y^2), y' = -y/(x^2 + y^2))$ genügen der Gleichung $x\,x' + \lambda\,(x\,y' + y\,x') - y\,y' = 1$ für jeden reellen Wert von λ. Die Punkte P, P' sind also harmonisch konjugiert in bezug auf alle Hyperbeln des Büschels $x^2 + 2\,\lambda\,x\,y - y^2 = 1$. Da der dem Punkt ζ konjugierte Punkt stets auf der Tangente in ζ an den durch ζ gehenden Büschelkegelschnitt liegt, so gehören diese gleichseitigen Hyperbeln zu den gesuchten Bahnkurven. Die Substitution $z \to \zeta$ lässt sich als Ähnlichkeitsabbildung der z-Ebene auf die ζ-Ebene deuten. In der z-Ebene sind diese Bahnkurven ebenfalls gleichseitige Hyperbeln. Sie gehen durch die beiden Fixpunkte von $z \to z'$ (in der ζ-Ebene sind dies $P(1, 0)$ und $P(-1, 0)$) und haben den Punkt α/γ zum Mittelpunkt.

Der Punkt z bewegt sich aus der beliebigen Ausgangslage $z = z_0$, falls diese nicht der Verbindungsgeraden der beiden Fixpunkte oder der Mittelnormalen von deren Verbindungsstrecke angehört, auf der durch z_0 gehenden Hyperbel des Büschels bis zu dem auf dem betreffenden Ast liegenden Fixpunkt, wo er mit dem Punkt z' zusammentrifft. Dieser letztere hat sich unterdessen auf derjenigen Bernoullischen Lemniskate bewegt, welche die Bahnhyperbel von z in den beiden Fixpunkten berührt und den Punkt α/γ ebenfalls zum Mittelpunkt hat.

In jenen beiden Ausnahmefällen verläuft die Bewegung von z geradlinig, und zwar im ersten Fall bis zum nächstliegenden Fixpunkt, im zweiten Fall auf den Punkt α/γ zu.

Aufgabe 610. Man zeige, dass in jedem ebenen Dreieck gilt:

a) Harmonisches Mittel der beiden grösseren Höhen $\geqq$ kleinste Winkelhalbierende.

b) Grösste Winkelhalbierende $\geqq$ harmonisches Mittel der beiden kleineren Seitenhalbierenden.

Das Gleichheitszeichen gilt jeweils nur im gleichseitigen Dreieck.

P. Erdös, Budapest, und F. Leuenberger, Feldmeilen

1. Lösung: O.B.d.A. gelte für die Seiten: $a \leqslant b \leqslant c$; dann ist für die Höhen: $h_a \geqslant h_b \geqslant h_c$, für die Winkel: $\alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma$, für die Winkelhalbierenden: $w_\alpha \geqslant w_\beta \geqslant w_\gamma$ und für die Seitenhalbierenden: $s_a \geqslant s_b \geqslant s_c$. F sei der Dreiecksflächeninhalt. Für x, $y > 0$ ist das harmonische Mittel $H(x, y)$ definiert durch

$$\frac{1}{H(x, y)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right).$$

a) Wegen $2F = a\,h_a = b\,h_b$ und wegen $\gamma \geqslant \pi/3$ gilt:

$$H(h_a, h_b) = \frac{2\,h_a h_b}{h_a + h_b} = \frac{4F}{a+b} = \frac{4ab}{a+b}\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2} \geqslant \frac{2ab}{a+b}\cos\frac{\gamma}{2} = w_\gamma .$$

Hier gilt das Gleichheitszeichen genau dann, wenn $\gamma = \pi/3$ und also $\alpha + \beta = 2\pi/3$, was seinerseits $\alpha = \beta = \pi/3$ impliziert. Damit ist die erste Teilbehauptung bewiesen.

b) Wegen $2a^2 \leqslant b^2 + c^2$ ist

$$\frac{1}{H(s_b, s_c)} = \frac{1}{\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b}} + \frac{1}{\sqrt{2a^2 + 2b - c^2}} \geqslant \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{b}\right); \tag{1}$$

hier gilt Gleichheit genau dann, wenn $2a^2 = b^2 + c^2$, was seinerseits $a = b = c$ impliziert. Andererseits ist wegen $b^2 + 2bc + c^2 - a^2 \geqslant c(2b + c) \geqslant 3bc$

$$\frac{1}{w_\alpha} = \frac{b+c}{\sqrt{bc\,(b^2 + 2bc + c^2 - a^2)}} \leqslant \frac{b+c}{\sqrt{3}\,bc} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{c} + \frac{1}{b}\right). \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt die zweite Teilbehauptung; in (2) gilt Gleichheit genau dann, wenn $b^2 - bc + c^2 - a^2 = 0$, was wieder $a = b = c$ impliziert. P. Bundschuh, Freiburg i. Br.

2. Lösung (mit Verschärfung): Die Längen der Seiten, Höhen, Winkelhalbierenden und Seitenhalbierenden eines Dreiecks seien mit a_i, h_i, w_i, s_i $(i = 1, 2, 3)$ bezeichnet, und es sei o.B.d.A. $a_1 \leqq a_2 \leqq a_3$, also $h_1 \geqq h_2 \geqq h_3$, $w_1 \geqq w_2 \geqq w_3$ und $s_1 \geqq s_2 \geqq s_3$.

A) Bedeutet $M_n(x, y)$ das Potenzmittel n-ter Ordnung $(n \in R)$ zweier positiver Zahlen x und y, dann gelten

$$w_3 \leqq M_{-2}(h_1, h_2) \tag{1}$$

und

$$w_1 \geqq M_4(s_2, s_3)\,, \tag{2}$$

wobei das Gleichheitszeichen jeweils genau für das reguläre Dreieck zutrifft.

B) Ungleichung (1) ist absolut scharf, d.h. aus der Allgemeingültigkeit von $w_3 \leqq M_n(h_1, h_2)$ für alle Dreiecke folgt $n \geqq -2$.

C) Aus $w_1 \geqq M_n(s_2, s_3)$ für alle Dreiecke folgt notwendig $n \leqq \lg 2/(\lg 9 - \lg 8)$.

Zum Beweis werden bekannte Darstellungen der Grössen w_i^2, h_i^2, s_i^2 als Terme in den Grössen a_k herangezogen ($i = 1, 2, 3$ und alle Indizes in positive Restklassen von 3 moduliert):

$$w_i^2 = a_{i+1}\, a_{i+2}\, [(a_{i+1} + a_{i+2})^2 - a_i^2]/(a_{i+1} + a_{i+2})^2 \,, \tag{3}$$

$$h_i^2 = [(a_{i+1} + a_{i+2})^2 - a_i^2]\, [a_i^2 - (a_{i+1} - a_{i+2})^2]/4\, a_i^2 \,, \tag{4}$$

$$s_i^2 = (2\, a_{i+1}^2 + 2\, a_{i+2}^2 - a_i^2)/4 \,. \tag{5}$$

A) Danach ist $w_3^2 = a_1\, a_2\, [(a_1 + a_2)^2 - a_3^2]/(a_1 + a_2)^2$ und
$M^2_{-2}(h_1, h_2) = [(h_1^{-2} + h_2^{-2})/2]^{-1} = [(a_1 + a_2)^2 - a_3^2]\, [a_3^2 - (a_2 - a_1)^2]/2\, (a_1^2 + a_2^2)$.

Trägt man dies in (1) ein, dann ergibt sich nach einfacher Umformung die zu (1) äquivalente Ungleichung

$$a_3^2 - a_2^2 - a_1^2 + [2\, a_1\, a_2/(a_1 + a_2)]^2 \geqq 0 \,. \tag{1'}$$

Diese trifft offensichtlich zu, denn wegen $a_1 \leqq a_2 \leqq a_3$ ist einerseits $a_3^2 \geqq a_2^2$ und andererseits $[2\, a_1\, a_2/(a_1 + a_2)]^2 \geqq a_1^2$, und die Gleichheitszeichen gelten genau für $a_1 = a_2 = a_3$.

Nach (3) und (5) ist $w_1^4 = a_2^2\, a_3^2\, [1 - a_1^2/(a_2 + a_3)^2]^2$ und
$M_4^4(s_2, s_3) = (s_2^4 + s_3^4)/2 = [(2\, a_3^2 + 2\, a_1^2 - a_2^2)^2 + (2\, a_1^2 + 2\, a_2^2 - a_3^2)^2]/32$.
Damit ergibt sich aus (2) die dazu äquivalente Ungleichung

$$32\, a_2^2\, a_3^2\, [1 - a_1^2/(a_2 + a_3)^2]^2 - (2\, a_3^2 + 2\, a_1^2 - a_2^2)^2 - (2\, a_1^2 + 2\, a_2^2 - a_3^2)^2 \geqq 0 \,, \tag{2'}$$

deren linke Seite mit L bezeichnet sei.

Um $L \geqq 0$ nachzuweisen, wird zunächst $a_1^2 \leqq a_2^2$ herangezogen. Danach ist

$$L \geqq 32\, a_2^2\, a_3^2\, [1 - a_2^2/(a_2 + a_3)^2]^2 - (2\, a_3^2 + a_2^2)^2 - (4\, a_2^2 - a_3^2)^2 =$$
$$= 32\, a_2^2\, a_3^2\, [1 - a_2^2/(a_2 + a_3)^2]^2 + 4\, a_2^2\, a_3^2 - 17\, a_2^4 - 5\, a_3^4 \,.$$

Ferner gilt im Bereich $0 < a_2 \leqq a_3$ die Abschätzung

$$[1 - a_2^2/(a_2 + a_3)^2]^2 \geqq [9 + 3\, (a_3^2 - a_2^2)/2\, a_3^2]/16 \,,$$

und damit

$$L \geqq 18\, a_2^2\, a_3^2 + 3\, a_2^2\, (a_3^2 - a_2^2) + 4\, a_2^2\, a_3^2 - 17\, a_2^4 - 5\, a_3^4 = (a_3^2 - a_2^2)\, (20\, a_2^2 - 5\, a_3^2) \,.$$

Nun ist nach der Dreiecksungleichung $a_3 \leqq a_1 + a_2 \leqq 2\, a_2$, also $20\, a_2^2 - 5\, a_3^2 \geqq 0$. Damit ist $L \geqq 0$ nachgewiesen, und Gleichheit tritt genau dann ein, wenn $a_1 = a_2 = a_3$ ist.

B) Für das Dreieck mit den Seitenlängen $a_1 = x$ $(0 < x \leqq 1)$ und $a_2 = a_3 = 1$ ist nach (3) und (4) $w_3 = x\sqrt{2 + x}/(1 + x)$, $h_1 = \sqrt{4 - x^2}/2$ und $h_2 = x\,\sqrt{4 - x^2}/2$, also $M_n(h_1, h_2) = x\,\sqrt{4 - x^2}\,[(1 + x^{-n})/2]^{1/n}/2$. Strebt x gegen 0, dann strebt w_3/x gegen $2^{1/2}$ und, falls $n < 0$ vorausgesetzt wird, $M_n(h_1, h_2)/x$ gegen $2^{-1/n}$. Aus der Bedingung $w_3 \leqq M_n(h_1, h_2)$ folgt also notwendig $2^{1/2} \leqq 2^{-1/n}$ und daraus $n \geqq -2$.

C) Betrachtet man andererseits das Dreieck mit den Seitenlängen $a_1 = a_2 = 1$ und $a_3 = 2 - x$ $(0 < x \leqq 1)$, dann ist für dieses nach (3) und (5) $w_1 = \sqrt{(2 - x)\,(8 - 6\,x + x^2)/(3 - x)}$, $s_2 = \sqrt{9 - 8\,x + 2\,x^2}/2$ und $s_3 = \sqrt{4\,x - x^2}/2$, also $M_n(s_2, s_3) = [(s_2^n + s_3^n)/2]^{1/n} = [(\sqrt{9 - 8\,x + 2\,x^2}^{\,n} + \sqrt{4\,x + x^2}^{\,n})/2]^{1/n}/2$. Wenn x gegen 0 strebt, dann strebt w_1 gegen $4/3$ und, unter der Voraussetzung $n > 0$, $M_n(s_2, s_3)$ gegen $3/2^{1+1/n}$. Aus der Bedingung $w_1 \geqq M_n(s_2, s_3)$ folgt demnach $4/3 \geqq 3/2^{1+1/n}$ und daraus $n \leqq \lg 2/(\lg 9 - \lg 8)$.

O. Reutter, Ochsenhausen

Weitere Lösungen sandten A. Bager (Hjørring, Dänemark), H. Frischknecht (Berneck), J. Quoniam (St-Etienne), K. Schuler (Rottweil).

Aufgabe 611. Let p be an odd prime, $(a, p) = 1$. Show that

$$S = \sum_{s=1}^{p-1} \tan \frac{\pi\, a\, s^2}{p} \begin{cases} 0 & (p \equiv 1 \pmod 4) \\ \left(\dfrac{-a}{p}\right) \sqrt{p} \displaystyle\sum_{k=1}^{p-1} (-1)^k \left(\dfrac{k}{p}\right) & (p \equiv 3 \pmod 4)\,, \end{cases}$$

where (a/p) is the Legendre symbol. L. Carlitz, Duke University, USA

Lösung: Da die Tangensfunktion die Periode π hat, gilt $\tan \pi a/p = \tan \pi b/p$, sobald $a \equiv b \pmod p$ ist.

Durchläuft s die Zahlen $1, 2, \ldots, (p-1)/2$, so durchläuft s^2 ein vollständiges System quadratischer Reste mod p. Ist $p \equiv 1 \pmod 4$, so ist mit r auch $-r$ quadratischer Rest mod p. Sei also $\{r_1, -r_1, r_2, -r_2, \ldots, r_{(p-1)/4}, -r_{(p-1)/4}\}$ ein vollständiges System quadratischer Reste mod p. Dann gilt in diesem Falle:

$$S = \sum_{s=1}^{p-1} \tan \frac{\pi a s^2}{p} = 2 \sum_{s=1}^{\frac{p-1}{2}} \tan \frac{\pi a s^2}{p} =$$

$$= 2 \sum_{n=1}^{\frac{p-1}{4}} \left(\tan \frac{\pi a r_n}{p} + \tan \frac{-\pi a r_n}{p} \right) = 0 .$$

Sei nun wieder p eine beliebige ungerade Primzahl. Bekanntlich gilt für komplexes z

$$\tan z = -i + 2i\,(e^{2iz} + 1)^{-1} .$$

Für $z = \pi a s^2/p$ und $\tau = e^{2\pi i/p}$ ergibt sich:

$$S = -i\,(p-1) + 2i \sum_{s=1}^{p-1} (1 + \tau^{as^2})^{-1} . \tag{1}$$

Wegen $(a s^2, p) = 1$ ist mit τ auch $\varphi = \tau^{as^2}$ primitive p-te Einheitswurzel. Für eine solche gilt:

$$\sum_{n=0}^{p-1} \varphi^n = 0 ,$$

woraus

$$(1 + \varphi)^{-1} = - \sum_{n=1}^{\frac{p-1}{2}} \varphi^{2n-1}$$

folgt. Nun können wir S berechnen. Es ist

$$\sum_{s=1}^{p-1} (1 + \tau^{as^2})^{-1} = - \sum_{n=1}^{\frac{p-1}{2}} \sum_{s=1}^{p-1} \tau^{a(2n-1)s^2} = \frac{p-1}{2} - \sum_{n=1}^{\frac{p-1}{2}} G(p;\, a\,(2n-1)) , \tag{2}$$

wobei

$$G(p;\, a\,(2n-1)) = \sum_{s=0}^{p-1} \tau^{a(2n-1)s^2} = \sum_{x=1}^{p-1} \left(\frac{x}{p}\right) \tau^{a(2n-1)x}$$

eine Gaußsche Summe ist. Ihr Wert ist

$$G(p;\, a\,(2n-1)) = \left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{2n-1}{p}\right)\sqrt{\varepsilon p}, \text{ wobei } \varepsilon = \left(\frac{-1}{p}\right) \text{ sei} \tag{3}$$

(vgl. etwa: H. Hasse, Vorlesungen über Zahlentheorie, 2. Aufl., S. 114–116.) Aus (1) folgt mit (2) und (3):

$$S = -2i \left(\frac{a}{p}\right) \sqrt{\varepsilon p} \sum_{n=1}^{\frac{p-1}{2}} \left(\frac{2n-1}{p}\right)$$

Einerseits ist

$$0 = \sum_{k=1}^{p-1} \left(\frac{k}{p}\right) = \sum_{n=1}^{\frac{p-1}{2}} \left(\frac{2n-1}{p}\right) + \sum_{n=1}^{\frac{p-1}{2}} \left(\frac{2n}{p}\right),$$

andererseits

$$\sum_{k=1}^{p-1} (-1)^k \left(\frac{k}{p}\right) = - \sum_{n=1}^{\frac{p-1}{2}} \left(\frac{2n-1}{p}\right) + \sum_{n=1}^{\frac{p-1}{2}} \left(\frac{2n}{p}\right),$$

woraus durch Subtraktion beider Gleichungen

$$\sum_{n=1}^{\frac{p-1}{2}} \left(\frac{2n-1}{p}\right) = -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{p-1} (-1)^k \left(\frac{k}{p}\right),$$

also

$$S = i \left(\frac{a}{p}\right) \sqrt{\varepsilon p} \sum_{k=1}^{p-1} (-1)^k \left(\frac{k}{p}\right)$$

folgt.

Falls $p \equiv 3 \pmod 4$ ist, wird $\varepsilon = (-1/p) = -1$ und $i\sqrt{\varepsilon} = -1$, so dass die Behauptung bewiesen ist.

Ist $p \equiv 1 \pmod 4$, so ist $(k/p) = ((p-k)/p)$ und folglich

$$\sum_{k=1}^{p-1} (-1)^k \left(\frac{k}{p}\right) = \sum_{n=1}^{\frac{p-1}{2}} \left[\left(\frac{2n}{p}\right) - \left(\frac{p-2n}{p}\right)\right] = 0,$$

woraus nochmals $S = 0$ folgt. E. Kroll, Mainz

Aufgabe 612. Für natürliche Zahlen k, t, b mit $k \geqslant 3$, $t \geqslant 2$, $b < t$ werde gesetzt:

$$H_k(b\,t^{-1}) = \sum_{n \geq 0} b^{k^n} \left(t^{k^n} + b^{k^n}\right)^{-1}.$$

Man zeige: $H_k(b\,t^{-1})$ ist irrational, wenn $b < t^{1-1/k}$ für ungerades k und wenn $b < t^{1-1/(k-1)}$ für gerades k.

(Diese Aufgabe löst eine offene Frage aus einer Arbeit von W. Schwarz, Remarks on the Irrationality and Transcendence of Certain Series, Math. Scand. *20*, 269–274 (1967).)

P. Bundschuh, Freiburg i. Br.

Lösung des Aufgabenstellers: Wir machen die Annahme, $H_k(b\,t^{-1})$ sei für die fraglichen Werte von k, t und b rational, etwa $H_k(b\,t^{-1}) = p/q$ mit natürlichen Zahlen p, q. Sei N eine natürliche Zahl; dann ist der Ausdruck

$$G_N\, p - q \sum_{n=0}^{N} b^{k^n} G_N \left(t^{k^n} + b^{k^n}\right)^{-1} = G_N\, q \sum_{n \geqslant N+1} b^{k^n} \left(t^{k^n} + b^{k^n}\right)^{-1} \tag{1}$$

eine natürliche Zahl, wenn $G_N > 0$ so bestimmt ist, dass $G_N \left(t^{k^n} + b^{k^n}\right)^{-1}$ ganz ist für $n = 0, \ldots, N$; solch ein G_N haben wir jetzt zu ermitteln.

a) Ist $k \geqslant 3$ und ungerade; dann gilt $\left(t^{k^n} + b^{k^n}\right) \mid \left(t^{k^N} + b^{k^N}\right)$ für alle $n = 0, \ldots, N$, wie unmittelbar aus der für alle ungeraden $m \geqslant 3$ gültigen Identität $x^m + y^m = (x+y)\,(x^{m-1} - x^{m-2}\,y + - \ldots + y^{m-1})$ folgt. Hier können wir also $G_N = t^{k^N} + b^{k^N}$ wählen.

b) Ist $k \geqslant 4$ und gerade, so wählen wir gröber $G_N = \prod_{n=0}^{N} \left(t^{k^n} + b^{k^n}\right)$.

Damit bekommen wir aus (1) im Fall a)

$$1 \leqslant q \left(t^{k^N} + b^{k^N}\right) \sum_{n=N+1}^{\infty} b^{k^n} \left(t^{k^n} + b^{k^n}\right)^{-1} < q \cdot 2\, t^{k^N} \cdot (b/t)^{k^{N+1}}\, t/(t-b)\,.$$

Wegen dieser Abschätzung müsste für alle N gelten:

$$\left(b^{-1}\, t^{1-1/k}\right)^{k^{N+1}} < 2\, q\, t/(t-b)\,,$$

was über für $N > N_1(k, t, b, q)$ falsch ist, da $b < t^{1-1/k}$ gilt.

Im Fall b) erhalten wir aus (1)

$$1 \leqslant q \prod_{n=0}^{N} \left(t^{k^n} + b^{k^n}\right) \sum_{n=N+1}^{\infty} b^{k^n} \left(t^{k^n} + b^{k^n}\right)^{-1} < q \cdot 2^{N+1}\, t^{k^{N+1}/k-1} \cdot (b/t)^{k^{N+1}}\, t/(t-b)\,,$$

so dass für alle N gelten müsste

$$\left(b^{-1}\, t^{1-1/(k-1)}\right)^{k^{N+1}} < 2^{N+1}\, q\, t/(t-b)\,,$$

und auch dies geht nicht, wenn $N > N_2(k, t, b, q)$, da $b < t^{1-1/(k-1)}$.

Anmerkung der Redaktion: Für weitere Resultate in dieser Richtung vgl. P. Bundschuh, Irrationalität und Transzendenz gewisser Reihen, Math. Scand. *26* (1970), Heft 2.

Aufgabe 613. Drei Geraden g_1, g_2, g_3 des Raumes R_3 schneiden sich in drei verschiedenen Punkten. Man bestimme alle Raumpunkte P mit der Eigenschaft: Die Fusspunkte der Lote von P auf g_1, g_2, g_3 sind kollinear. O. REUTTER, Ochsenhausen

Lösung: E sei die von g_1, g_2, g_3 aufgespannte Ebene. A_1, A_2, A_3 seien die drei verschiedenen Schnittpunkte von g_1, g_2, g_3.

Für $P \in E$ gilt: Die Fusspunkte der Lote von P auf g_1, g_2, g_3 sind genau dann kollinear, wenn P auf der Umkreislinie des Dreiecks $A_1A_2A_3$ liegt (Satz von Wallace).

Wir betrachten nun die Mantelfläche M des Drehzylinders, der senkrecht zu E steht und aus E die Umkreislinie des Dreiecks $A_1A_2A_3$ schneidet. Offenbar hat jeder Punkt $P \in M$ die gewünschte Eigenschaft.

Jeder Raumpunkt $P \notin M$ hat die geforderte Eigenschaft nicht: Hätte ein solcher Punkt die verlangte Eigenschaft, so ergäbe sich mit der Normalprojektion $P' \in E$ von P ein Widerspruch zum oben angegebenen Satz.

Der gesuchte geometrische Ort ist also die bereits erwähnte Mantelfläche M eines Drehzylinders. H. FRISCHKNECHT, Berneck

Weitere Lösungen sandten A. BAGER (Hjørring), C. BINDSCHEDLER (Küsnacht), J. FEHÉR (Pécs, Ungarn), W. KIENBERGER (Graz), I. PAASCHE (München).

Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben erbeten bis **10. Juli 1971**, wenn möglich in Maschinenschrift.

Aufgabe 634. Es seien f, g zwei im Intervall $[a, b]$ im Riemannschen Sinne eigentlich integrierbare reellwertige Funktionen mit $f(x) \geqslant 0$, $g(x) \geqslant c > 0$ für alle $x \in [a, b]$. Ferner seien p, q reelle Zahlen mit $0 < p < 1$, $q < 0$, $1/p + 1/q = 1$. Man leite die «Gegenform zur Hölderschen Ungleichung»

$$\int_a^b f\,g\,dx \geqslant \left(\int_a^b f^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_a^b g^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

direkt aus der gewöhnlichen Hölderschen Ungleichung her. H. HADWIGER, Bern

Aufgabe 635. Ist $\alpha(n)$ die Anzahl der Darstellungen von n als kleinstes gemeinsames Vielfaches zweier natürlicher Zahlen (unter Berücksichtigung der Reihenfolge), so gilt für $R(s) > 1$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(n)}{n^s} = \frac{\zeta^3(s)}{\zeta(2s)},$$

wobei ζ die Riemannsche Zetafunktion bedeutet. Es sei allgemeiner für reelle a und b

$$\alpha_{a,b}(n) = \sum_{[x,y]=n} x^a y^b .$$

Man zeige, dass für $R(s) > 1 + \max(a, b, a+b)$ die Beziehung

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_{a,b}(n)}{n^s} = \frac{\zeta(s-a)\,\zeta(s-b)\,\zeta(s-a-b)}{\zeta(2s-a-b)}$$

gilt. H. SCHEID, Mainz

Aufgabe 636. In einer Ebene sind zwei Geraden g_1, g_2 und drei Punkte A_1, A_2, P gegeben. Man bestimme diejenigen durch A_1 und A_2 gehenden Kegelschnitte, die g_1 und g_2 berühren und deren Berührungspunkte mit P kollinear sind.

C. BINDSCHEDLER, Küsnacht

Aufgabe 637. Am ebenen Dreieck mit Flächeninhalt $\frac{1}{2}\sqrt{abcd} = \frac{1}{2}\sqrt{h_a h_b h_c h} = \sqrt{r_a r_b r_c r} = \sqrt{s_a s_b s_c s}$ (Seiten, Höhen, Berührradien, Berührstrecken) zeige man: Die Grössen $x = \sqrt{r_a/s_b}$ und $y = \sqrt{h_a/b}$ genügen den Ungleichungen

$$x^3 + 2\sqrt{s/r} \leqq x\, s/r\,, \tag{1}$$

$$y^3 + 2\sqrt{d/h} \leqq 2\, y\, s/h\,. \tag{2}$$

Gleichheit genau im Falle $a = b$. I. PAASCHE, München

Literaturüberschau

Elements of Functional Analysis. Von I. J. MADDOX. X und 208 Seiten. 50s. Cambridge University Press, Cambridge 1970.

Inhalt: Preface. 1) Basic set theory and analysis. 2) Metric and topological spaces. 3) Linear and linear metric spaces. 4) Normed linear spaces. 5) Banach algebras. 6) Hilbert space. 7) Matrix transformations in sequence spaces. Bibliography. Index.

Das Buch ist zur Einführung in die Funktionalanalysis auf recht früher Stufe gedacht (an britischen Universitäten etwa für «undergraduate students» im 2. oder 3. Jahr mit Hauptfach Mathematik) und baut auf Grundkenntnisse der reellen und komplexen Analysis auf. Das Vorgehen des Verfassers ist dementsprechend sehr sorgfältig. Zahlreiche Beispiele illustrieren die erklärten Begriffe; eine glänzende Idee ist es in diesem Zusammenhang, den Folgenräumen wegen ihrer relativ einfachen Erklärbarkeit vor den Räumen integrierbarer Funktionen den Vorzug zu geben. In den über 300 Aufgaben verschiedener Schwierigkeitsgrade versteht es der Verfasser, einerseits die vorausgesetzten Kenntnisse in geschickter Weise miteinzubeziehen und dem Leser eine Gelegenheit zur Überprüfung seines Verständnisses zu geben, andererseits aber interessante Ausblicke über den Rahmen dieses Buches hinaus zu vermitteln; das letztere betrifft insbesondere den Schlussabschnitt «Some problems for further study».

Die vom Verfasser gewählte Darstellung, zuerst die metrisch-topologischen und die algebraischen Aspekte getrennt zu behandeln und nachher die Überlagerung der Strukturen zu vollziehen (Kapitel 3), entspricht einem günstigen Ordnungsprinzip der Funktionalanalysis. So erscheinen die einen Resultate als rein metrisch-topologisch, die andern als rein algebraisch, was die Flexibilität bei Anwendungen beträchtlich erhöht. Die fruchtbarsten und typischsten Resultate sind nun aber diejenigen, die aus der Überlagerung der metrisch-topologischen und der algebraischen Struktur hervorgehen und die bekanntlich noch immer zahlreiche Einzelfälle einzuschliessen vermögen.

Trotz dem verhältnismässige kleinen Umfang des Buches arbeitet der Verfasser die Bedeutung einer ansehnlichen Zahl von Sätzen heraus, die zum Grundgerüst der modernen Funktionalanalysis gehören: Banachscher Fixpunktsatz, Bairescher Kategoriensatz, Prinzip der gleichmässigen Beschränktheit, Satz von Banach-Steinhaus, Satz von der offenen Abbildung, Satz vom inversen Operator, Satz vom abgeschlossenen Graphen, Satz von Hahn-Banach, Satz von Gelfand-Mazur und eine schwache Variante des Darstellungssatzes von Gelfand für halbeinfache kommutative Banach-Algebren. Kapitel 6 bringt die eher geometrischen Aspekte der Theorie der Hilbert-Räume, während auf die Operatorentheorie dieser Räume bewusst verzichtet wird; implizite sind aber in den Kapiteln 4 und 5 viele Ansätze zur letzteren vorhanden. Einer speziellen Neigung folgend, führt der Verfasser im Schlusskapitel die Wirkungsweise der allgemeinen Theorie an Problemen der Limitierungstheorie vor.

Die gefällige äussere Aufmachung und die übersichtliche drucktechnische Gestaltung machen das Buch von MADDOX zu einem höchst lesenswerten Werk. J. RÄTZ