Zeitschrift: Elemente der Mathematik
Herausgeber: Schweizerische Mathematische Gesellschaft
Band: 26 (1971)
Heft: 1

Artikel: Die algebraische Deutung der Hilbert'schen geometrischen Konstruktionen mittels Lineals und Eichmasses
Autor: Kijne, D.
DOI: https://doi.org/10.5169/seals-28061

Nutzungsbedingungen
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

Conditions d'utilisation
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

Terms of use
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

Download PDF: 14.07.2025

ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

Zeitschrift zur Pflege der Mathematik
und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts

Publiziert mit Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds
zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung

El. Math. Band 26 Heft 1 Seiten 1-24 10. Januar 1971

Die algebraische Deutung der Hilbert'schen geometrischen Konstruktionen mittels Lineals und Eichmasses

Im siebten Kapitel seiner «Grundlagen der Geometrie» analysiert HILBERT die ebenen geometrischen Konstruktionen, welche auf den Axiomen der Gruppen I–IV seines Systems beruhen. Nach Korrektur eines in diesem Kapitel auftretenden Fehlers soll hier eine Verbesserung des Satzes 65 gegeben werden, die sich auf die Resultate eines Teiles meiner Dissertation [4] stützt. Die hier zu gebende Korrektur bezieht sich besonders auf die in Satz 65 genannte Anzahl der Lösungen.

Auch sonst kann man an jenem Satz Kritik üben. Eine Definition einer geometrischen Konstruktionsaufgabe, sowie die einer Lösung einer solchen Aufgabe, fehlt; vermutlich identifiziert Hilbert die Lösungen mit den «gesuchten Punkten»; man muss aus dem Text schliessen, dass Hilbert etwaige Anordnungsbeziehungen in der Aufgabe ausser Betracht lässt; schliesslich scheint Hilbert nur den Fall im Auge zu haben, wo im allgemeinen alle gesuchten Punkte zueinander konjugiert sind (im algebraischen Sinn), wobei bei spezieller Wahl der Parameter die Anzahl der Wurzelzeichen sich reduzieren kann, aber die Anzahl der «Lösungen» nicht.

Wir wollen hier zeigen, dass es ein Irrtum ist, das algebraische und das geometrische Konjugiertsein zu identifizieren; das letzte umfasst nämlich das erste.

Die Hilbertschen aktiven Konstruktionsoperationen sind:

1. $\boldsymbol{L}_1$, die die Gerade $\underline{l} := \boldsymbol{L}_1(a, b)$ durch zwei konstruierte Punkte a und b erzeugt, $\boldsymbol{P}_1$, die den Schnittpunkt $p := \boldsymbol{P}_1(\underline{a}, \underline{b})$ zweier konstruierten nicht-parallelen Geraden $\underline{a}$ und $\underline{b}$ erzeugt;
2. die Operation des Abtragens einer Strecke, die in vier Elementaroperationen $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{P}_2$, $\boldsymbol{S}_1$ und $\boldsymbol{S}_2$ geteilt ausgeführt wird ($\boldsymbol{S}_1$ und $\boldsymbol{S}_2$ sind Selektionsoperationen):
   $\boldsymbol{C}$, die den Kreis $\alpha := \boldsymbol{C}(a, p\,q)$ mit einem konstruierten Punkt a als Mittelpunkt und der Länge $p\,q$ einer von zwei konstruierten Punkten p und q markierten Strecke als Radius erzeugt,
   $\boldsymbol{P}_2$, die das Schnittpunktepaar b_1 & $b_2 := \boldsymbol{P}_2(\alpha, \underline{a})$ eines konstruierten Kreises α und einer konstruierten Gerade $\underline{a}$ durch den Kreismittelpunkt erzeugt,
   $\boldsymbol{S}_1$, die nach beliebiger Wahl ein Element x aus einem konstruierten Elementepaar x_1 & x_2 anweist,
   $\boldsymbol{S}_2$, die aus einem konstruierten Elementepaar x_1 & x_2 dasjenige Element x anweist, das eine vorgeschriebene Relation mit schon zuvor konstruierten Elementen befriedigt.

Bemerkungen

1. Die gegebenen Elemente einer Figur werden als konstruiert betrachtet.

2. Mit dem Symbol & sei gemeint: die Punkte b_1 & b_2 werden als ein Paar produziert; vielleicht können sie nachher in Bezug auf schon zuvor konstruierte Elemente unterschieden werden, entweder mittels 0-Entscheidungsoperationen oder mittels $\lessgtr$-Entscheidungsoperationen. (0-Relationen sind jene Relationen, die sich algebraisch durch Gleichungen darstellen lassen, wie Inzidenz, Parallelismus, usw., $\lessgtr$-Relationen sind jene, die sich durch Gleichungen und Ungleichungen aber nicht nur durch Gleichungen darstellen lassen. Eine 0-Entscheidungsoperation stellt fest, ob gewisse konstruierte Elemente eine gewisse 0-Relation befriedigen; analog für eine $\lessgtr$-Entscheidungsoperation.)

3. Auf Anordnungsbeziehungen wird verzichtet werden. So ist mit einem Automorphismus einer Figur F eine alle 0-Relationen invariant lassende 1–1-Abbildung $F \to F$ gemeint.

4. Vom Standpunkt der Menge von konstruierten Punkten ist $\boldsymbol{P}_2$ zweiwertig. Im allgemeinen veranlasst die Anwendung einer Operation $\boldsymbol{P}_2$ eine Fortsetzung des Konstruktionsprozesses in zwei Richtungen; daher wird $\boldsymbol{P}_2$ eine *Gabelungsoperation* genannt.

5. Anstatt der Operation $\boldsymbol{C}$ genügt, wie bekannt, die Operation $\boldsymbol{C}'$, die den Kreis $\gamma := \boldsymbol{C}'(a, 1)$ mit einem konstruierten Punkt a als Mittelpunkt und der Länge 1 einer von zwei konstruierten Punkten markierten Einheitsstrecke als Radius erzeugt. Hierauf gründen sich die Hilbertschen Konstruktionen mit dem Eichmass, und die Operation $\boldsymbol{C}'$ wird bei den folgenden Betrachtungen angewendet.

Es sei jetzt B eine Menge von gegebenen Punkten, mit passenden rechtwinkligen Koordinaten: $B = \{z(0, 0), e(1, 0), p_\lambda(\alpha_\lambda, \beta_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\}$, Λ irgend eine Indizenmenge. Ist P der Körper $\Pi(\alpha_\lambda, \beta_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$, der aus dem rationalen Körper Π nach Adjunktion aller α_λ und β_λ entsteht, dann ist P invariant gegenüber Ähnlichkeitstransformationen, unter der Voraussetzung, dass die Bildpunkte von (0, 0) und (1, 0) abermals Punkte aus B sind. (Man bemerke die Asymmetrie des Koordinatensystems hinsichtlich der Menge B, eine ähnliche Asymmetrie wie in der komplexen Ebene zwischen der imaginären und der reellen Achse.) Es sei zunächst $\Delta = \Pi(\alpha_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$, also $P = \Delta(\beta_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$.

Definition. Ein Element $\alpha \in P$ heisse *gerade* (*ungerade*) in den β_λ, wenn α eine gerade (ungerade) Funktion aller β_λ zusammen ist, mit Koeffizienten in Δ.

Definition. Die folgenden mit B verbundenen Mengen werden definiert:

1. Das *P-Feld auf B*, oder kurz das *P-Feld:*
   Punkt $p(\xi, \eta) \in P$-Feld $\langle\!=\!\rangle$ $\xi, \eta \in P$,
   Gerade $\underline{a}$ $(y = \varrho_1 x + \varrho_2) \in P$-Feld $\langle\!=\!\rangle$ $\varrho_1, \varrho_2 \in P$,
   Gerade $\underline{a}$ $(x = \sigma) \in P$-Feld $\langle\!=\!\rangle$ $\sigma \in P$,
   Kreis γ $(x^2 + y^2 + \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 = 0) \in P$-Feld $\langle\!=\!\rangle$ $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in P$;
2. falls $\sum_{\lambda \in \Lambda} \beta_\lambda^2 > 0$: das *P-Halbfeld über Δ auf B*, oder kurz das *P-Halbfeld über Δ*, ist die Teilmenge des P-Feldes bestehend aus
   den Punkten $p(\xi, \eta)$ mit ξ gerade und η ungerade in den β_λ,

den Geraden $\underline{a}$ $(y = \varrho_1 x + \varrho_2)$ mit ϱ_1 und ϱ_2 ungerade in den β_λ,
den Geraden $\underline{a}$ $(x = \sigma)$ mit σ gerade in den β_λ,
den Kreisen γ mit γ_1, γ_3 gerade und γ_2 ungerade in den β_λ;

3. falls $\sum_{\lambda \in \Lambda} \beta_\lambda^2 = 0$: das $P(0)$-*Halbfeld über P auf B*, oder kurz das $P(0)$-*Halbfeld über P*,

ist die Teilmenge des P-Feldes bestehend aus den Punkten $p(\xi, 0)$, den Geraden $\underline{a}$ $(x = \sigma)$, der Geraden $\underline{x}$ $(y = 0)$, und den Kreisen γ $(x^2 + y^2 + \gamma_1 x + \gamma_3 = 0)$, mit $\xi, \sigma, \gamma_1, \gamma_3 \in P$.

Im folgenden wird immer nur der Fall 2 betrachtet; die folgenden Sätze sind jedoch ebenfalls auf den Fall 3 anwendbar.

Es ist klar, dass das P-Halbfeld über Δ dann und nur dann mit dem P-Feld zusammenfällt, wenn jedes $\alpha \in P$ sowohl gerade wie auch ungerade in den β_λ ist, d.h. wenn eine algebraische Beziehung $\varphi'(\beta_\lambda) = \varphi''(\beta_\lambda) \neq 0$ (mit Koeffizienten aus Δ) zwischen den β_λ besteht, φ' gerade und φ'' ungerade in den β_λ, d.h. wenn $1 \in P$ ungerade in den β_λ ist. Diese Bedingungen sind dann und nur dann erfüllt, wenn das P-Halbfeld über Δ ein *Quadrat* enthält.

Lemma. Die Mengen P-Feld auf B und P-Halbfeld über Δ auf B sind nicht nur unabhängig vom gewählten Koordinatensystem, aber auch invariant gegenüber Ähnlichkeitstransformation, wenn nur die neuen Punkte (0, 0) und (1, 0) dem P-Feld, bzw. dem P-Halbfeld über Δ, angehören.

Für das P-Feld ist die Behauptung trivial; die zum Beweis im Fall eines P-Halbfeldes notwendigen Berechnungen werden dem Leser überlassen.

Wir nennen jetzt B die *Basis* des P-Feldes (P-Halbfeldes über Δ) auf B.

Für die aktiven Operationen $\boldsymbol{L}_1$, $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{C}'$, $\boldsymbol{C}$ und $\boldsymbol{P}_2$ gelten die Sätze 1, 2 und 3.

Satz 1. Sowohl ein P-Feld wie auch ein P-Halbfeld über Δ ist konstruktiv abgeschlossen unter den Operationen $\boldsymbol{L}_1$, $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{C}$ (also auch $\boldsymbol{C}'$).

Der Beweis folgt aus Berechnung.

Erklärung. In den Sätzen 2 und 3 benützen wir die folgenden Begriffe. Es sei a ein Punkt und $\underline{a}$ eine Gerade (a und $\underline{a}$ inzident) eines P-Feldes oder P-Halbfeldes über Δ, Z; die Anwendung der Operationen $\boldsymbol{C}'$, $\boldsymbol{P}_2$, $\boldsymbol{S}_1$ und $\boldsymbol{S}_2$ ergebe:

$$b_1 \,\&\, b_2 := \boldsymbol{P}_2(a, a);\ b_1 := \boldsymbol{S}_1(b_1 \,\&\, b_2);\ b_2 := \boldsymbol{S}_2(b_1 \,\&\, b_2 \mid b_1 \neq b_2)\,.$$

Sodann hat man: $b_1 \in Z \langle = \rangle b_2 \in Z$. Wenn nun $b_1 \notin Z$, so gestalten wir die neue Basis $B^* := B \cup \{b_1\}$, wodurch auch die Koordinatenmengen $\{\alpha_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ und $\{\beta_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ erweitert werden, sagen wir zu $\{\alpha_\lambda \mid \lambda \in \Lambda^*\}$ und $\{\beta_\lambda \mid \lambda \in \Lambda^*\}$. Die zugehörigen mit P und Δ korrespondierenden Körper bei B^* werden P^* und Δ^* genannt.

Satz 2. Es sei Z das P-Feld auf einer Basis B; ist die Gleichung von $\underline{a}$: $x = \sigma$, so sind b_1 und b_2 wieder Punkte aus Z. Ist die Gleichung von $\underline{a}$: $y = \varrho_1 x + \varrho_2$, so ist entweder $b_1 \in Z$ oder $b_1 \notin Z$; im letzten Fall gibt die Anwendung von $\boldsymbol{P}_2$ auf $\boldsymbol{C}'(a, 1)$ und a Anlass zu einer Erweiterung des Körpers $P \to P^* = P(\sqrt{1 + \theta^2})$, $\theta \in P$, und damit zu einer Erweiterung $\Delta \to \Delta^* = \Delta(\sqrt{1 + \theta^2})$, $\theta \in P$; die erzeugten Punkte b_1 und b_2 sind konjugiert hinsichtlich des P-Feldes Z: man kann sie nicht mittels 0-Relationen bezüglich der Elemente von Z unterscheiden. Die Permutationen von b_1

und b_2 induzieren Z elementweise festlassende Automorphismen des P^*-Feldes auf B^*, welche 1–1-deutig korrespondieren mit den Automorphismen von P^* in Bezug auf P. Die Automorphismen bilden eine 2-zyklische Gruppe, isomorph der Galois'schen Gruppe von P^* nach P.

Den Beweis überlassen wir dem Leser.

Satz 3. Es sei Z das P-Halbfeld über Δ auf einer Basis B, das als ungleich dem P-Feld vorausgesetzt wird; ist die Gleichung von $\underline{a}$: $x = \sigma$, so ist $b_1 \notin Z$, aber b_1 gehört dem P-Feld an; man kann die Punkte b_1 und b_2 nicht mittels 0-Relationen bezüglich der Elemente von Z unterscheiden, und b_1 und b_2 sind konjugiert hinsichtlich Z. Die Permutationen von b_1 und b_2 induzieren Z elementweise festlassende Automorphismen des P-Feldes, welche eine 2-zyklische Gruppe bilden.

Ist aber die Gleichung von $\underline{a}$: $y = \varrho_1 x + \varrho_2$, so ist entweder $b_1 \in Z$ oder $b_1 \notin Z$; im letzten Fall ist P^* abermals eine algebraische Erweiterung von P: $P^* = P(\sqrt{1+\theta^2})$, $\theta \in P$, $\theta \notin \Delta$, und Δ^* ist eine algebraische oder transzendente Erweiterung von Δ: $\Delta^* = \Delta(\sqrt{1+\theta^2})$, $\theta \in P$, $\theta \notin \Delta$. In diesem Fall wird Z zu dem P^*-Halbfeld über Δ^* erweitert; dieses besitzt eine 2-zyklischen Gruppe von Automorphismen, induziert von den Permutationen von b_1 und b_2, die Z elementweise festlassen. Die Gruppe ist der Galois'schen Gruppe von P^* nach P isomorph.

Beweis. Es sei $a(\xi, \eta)$, ξ gerade, η ungerade in den β_λ; dann ist zunächst $\underline{a}$: $x = \xi$. Für die Koordinaten der b_1 & b_2 findet man: $x = \xi, y = \eta \pm 1$. Weil 1 nicht ungerade in den β_λ ist, ist $b_1 \notin Z$, aber b_1 ist Element des P-Feldes auf B. Die Hinzufügung von b_1 zu B ergibt die Erweiterung der Menge $\{\beta_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ mit einem Element $\eta + 1$, womit 1 ungerade in den neuen β_λ geworden ist (mit Koeffizienten in Δ). Es sei nun $B^* = B \cup \{b\}$; dann ist das P-Halbfeld über Δ auf B^* gleich dem P-Feld auf B^*. Um zu zeigen, dass auch jetzt die Permutationen von b_1 und b_2 Automorphismen des P-Feldes induzieren, welche Z elementweise festlassen, bemerken wir Folgendes.

Weil es in P keine algebraische Beziehung gibt, die sich schreiben lässt $\varphi' = \varphi'' \neq 0$, φ' gerade und φ'' ungerade in den β_λ, so kann jedes Element $\varepsilon \in P$ eindeutig dargestellt werden: $\varepsilon = \varepsilon' + \varepsilon''$, ε' gerade und ε'' ungerade in den β_λ, mit Hilfe der Identität

$$F(\beta_\lambda) = \frac{1}{2}\{F(\beta_\lambda) + F(-\beta_\lambda)\} + \frac{1}{2}\{F(\beta_\lambda) - F(-\beta_\lambda)\}, \quad \lambda \in \Lambda .$$

In der Tat gilt diese Identität für jedes $\varepsilon \in P$, weil bei geeigneter Darstellung in keinem der beiden Glieder ein Nenner verschwinden kann. Wir spalten auf diese Weise die Koordinaten der Punkte und die Gleichungskoeffizienten der Geraden und Kreise des P-Feldes auf. Dann ist die Abbildung $\mathfrak{a}$, definiert durch

$$p\,(\pi_1' + \pi_1'', \pi_2' + \pi_2'') \to \mathfrak{a}\,p\,(\pi_1' - \pi_1'', -\pi_2' + \pi_2''),$$

$$\underline{r}\,(y = (\varrho_1' + \varrho_1'')\,x + \varrho_2' + \varrho_2'') \to \mathfrak{a}\,\underline{r}\,(y = (-\varrho_1' + \varrho_1'')\,x - \varrho_2' + \varrho_2''),$$

$$\underline{s}\,(x = \sigma' + \sigma'') \to \mathfrak{a}\,\underline{s}\,(x = \sigma' - \sigma''),$$

$$\gamma\,(x^2 + y^2 + (\gamma_1' + \gamma_1'')\,x + (\gamma_2' + \gamma_2'')\,y + \gamma_3' + \gamma_3'' = 0) \to$$

$$\mathfrak{a}\,\gamma\,(x^2 + y^2 + (\gamma_1' - \gamma_1'')\,x + (-\gamma_2' + \gamma_2'')\,y + \gamma_3' - \gamma_3'' = 0)$$

ein Automorphismus des P-Feldes, wobei das P-Halbfeld über Δ, Z, elementweise invariant ist, die Punkte b_1 und b_2 aber permutiert werden. Die Richtigkeit der Behauptung ergibt sich aus Berechnung: alle 0-Relationen sind invariant unter $\mathfrak{a}$. Dieses zeigt sich auf Grund der Tatsache, dass, wenn wir eine algebraische Beziehung $\varphi'(\beta_\lambda) = \varphi''(\beta_\lambda)$ finden, φ' gerade und φ'' ungerade in den alten β_λ, notwendig $\varphi' = 0$ und $\varphi'' = 0$ sein müssen.

Umgekehrt, weil ein Automorphismus die Invarianz der 0-Relationen erfordert, induziert die Abbildung $b_1 \rightleftarrows b_2$ notwendig den Automorphismus $\mathfrak{a}$. Es leuchtet ein, dass ein Element des P-Feldes dann und nur dann $\mathfrak{a}$-invariant ist, wenn es Z angehört. Die Automorphismengruppe ist offenbar 2-zyklisch.

Schliesslich sei die Gleichung von $\underline{a}$: $y = \varrho_1 x + \varrho_2$, so dass $\eta = \varrho_1 \xi + \varrho_2$. Die Schnittpunkte b_1 und b_2 des Kreises $\bar{C}'(a, 1)$ mit $\underline{a}$ haben die Koordinaten $x = \xi \pm (1 + \varrho_1^2)^{-1/2}$, $y = \varrho_1 x + \varrho_2$. Die Hinzufügung von b_1 zu B verursacht die Erweiterung der Menge $\{\alpha_\lambda \mid \lambda \in \Delta\}$ mit einem Element x, gerade in den β_λ, und eine Erweiterung der Menge $\{\beta_\lambda \mid \lambda \in \Delta\}$ mit einem Element y, ungerade in den β_λ. Wenn also $\sqrt{1 + \varrho_1^2} \notin P$, so haben wir mit einer algebraischen Erweiterung $P \to P^*$ zu tun, welche geometrisch die Erweiterung von Z (P-Halbfeld über Δ) zu dem $P(\sqrt{1 + \varrho_1^2})$-Halbfeld über $\Delta(\sqrt{1 + \varrho_1^2})$ zu Folge hat. Da ϱ_1 ungerade in den β_λ ist, ist $\varrho_1 \notin \Delta$.

Wenn aber $\sqrt{1 + \varrho_1^2} \in P$, so wird Z *nicht erweitert*. Im ersten Fall korrespondieren die Permutationen der Punkte b_1 und b_2 mit den Automorphismen von P^* in Bezug auf P; sie induzieren die Automorphismen vom P^*-Halbfeld über Δ^*, die Z elementweise festlassen. Die Automorphismengruppe ist der Galois'schen Gruppe von P^* nach P isomorph. Im letzten Fall sind b_1 und b_2 nicht hinsichtlich Z konjugiert.

Hiermit ist der Satz bewiesen.

Bemerkungen

1. Wenn $b_1 \notin Z$, und daher auch $b_2 \notin Z$, heisse die angewendete Operation $\boldsymbol{P_2}$ eine *erweiternde* Gabelungsoperation, die entweder *algebraisch* erweiternd (Satz 2 und Satz 3, zweiter Fall) oder *rational* erweiternd (Satz 3, erster Fall) ist, je nach der Stellung des Koordinatensystems.

2. Die 2-zyklische Gruppe von Automorphismen eines P-Feldes in Bezug auf ein invariantes P-Halbfeld über Δ ($\Delta \subset P$) wird eine *Orientationsgruppe* $\mathfrak{D}$ genannt; sie stimmt ja mit der Permutationsgruppe der beiden möglichen Drehungssinne des Koordinatensystems überein. Die Elemente aus $\mathfrak{D}$ permutieren auch die Orientierungen aller Quadrate und gleichschenklig rechtwinkligen Dreiecke im P-Feld.

3. Die Bildpunktemenge $M(K)$ eines Körpers komplexer Zahlen K in der komplexen Ebene kann bei passender Wahl der reellen Körper P und Δ als ein P-Halbfeld über Δ in einer Euklidischen Ebene betrachtet werden (wenn man nur die *Punkte* im Halbfeld beachtet); so ist z.B. $M(\Pi(\sqrt{3}i))$ genau die Punktmenge enthalten im $\Pi(\sqrt{3})$-Halbfeld über Π. Die Anwendung einer rational erweiternden Operation $\boldsymbol{P_2}$ auf Elemente im P-Halbfeld über Δ erzeugt eine Erweiterung des Halbfeldes zum umfassenden P-Feld, welche korrespondiert mit der algebraischen Erweiterung von K zu $K(i)$. Die Orientierungsgruppe $\mathfrak{D}$ des P-Feldes stimmt jetzt mit der Gruppe von $K(i)$ nach K überein; sie ist die Permutationsgruppe der positiven Richtungen der imaginären Achse, oder die der Bildpunkte der Zahlen i und $-i$.

Definitionen

Es sei B eine Menge von gegebenen Elementen in einer Geometrie, z.B. der Hilbertschen Geometrie H; es sei F, $F \supset B$, eine Menge von Elementen in H, konstruierbar aus denen von B mittels der Operationen einer Operationenmenge V; so heisse die Reihe sukzessiver Operationen aus V, die von B zu F führen, ein *V-Programm.*

Ein Element $t \in H$ heisst *eindeutig* konstruierbar aus B mittels der Operationen aus V, wenn es ein V-Programm gibt, führend von B zu solch einer Menge F, $B \subset F$, $t \in F$, dass t unter allen Automorphismen von F, die B elementweise festlassen, invariant ist. Ein V-Programm, das sich auf jede Elementenmenge B einer bestimmten Struktur anwenden lässt, heisst eine *einwertige Operation*, wenn sie am Ende genau ein Element (Punkt, Gerade, Kreis), ohne Konjugierten, erzeugt. (Zwei Elemente t und s heissen (geometrisch) *konjugiert* in Bezug auf B, wenn die Abbildung $\mathfrak{a}$ von $F = B \cup \{t, s\}$ auf F, mit $\mathfrak{a}\, t = s$, $\mathfrak{a}\, s = t$, $\mathfrak{a}\, x = x$ für alle $x \in B$, ein Automorphismus ist.)

Die Menge aller Elemente in H, welche aus B mittels Operationen aus V konstruierbar sind, wird das *Konstruktionsfeld* $H_V(B)$ genannt. $H_V(B)$ ist die kleinste konstruktiv abgeschlossene Menge von Elementen in G unter den Operationen aus V, auf der *Basis* B.

Ist nun Q die Hilbertsche Operationenmenge $\{\boldsymbol{L}_1, \boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{C}', \boldsymbol{P}_2, \boldsymbol{S}_1, \boldsymbol{S}_2\}$, dann hat man, wie bekannt: $p(\xi, \eta) \in H_Q(B) \langle\!=\!\rangle \xi, \eta \in \Omega(P)$, wobei $\Omega(P)$ der Körper ist, dessen Elemente aus denen von P hervorgehen vermöge einer endlichen Anzahl von Additionen, Subtraktionen, Multiplikationen, Divisionen und Operationen $\theta \to \sqrt{1 + \theta^2}$, P definiert wie üblich.

Die einwertigen Operationen, enthalten in der Menge der Q-Programme, werden *orthogonal-rationale* Operationen genannt. (In [4] heissen sie orthogonal-linear, weil sie ausführbar sind mit dem Lineal, wenn nur zwei Paare senkrechter Geraden gegeben sind. Aus algebraischen Gründen hat der neue Name den Vorzug.) Die wichtigsten sind die elementaren Operationen $\boldsymbol{L}_1$, $\boldsymbol{P}_1$, $\boldsymbol{C}'$ (und $\boldsymbol{C}$), und

$\boldsymbol{L}_2$, die die Gerade $\underline{l} := \boldsymbol{L}_2(a, /\!/\underline{a})$ durch einen konstruierten Punkt a, parallel zu einer konstruierten Gerade $\underline{a}$, a nicht inzident mit $\underline{a}$, erzeugt,

$\boldsymbol{L}_3$, die die Gerade $\underline{l} := \boldsymbol{L}_3(a, \perp\underline{a})$ durch einen konstruierten Punkt a, senkrecht zu einer konstruierten Gerade $\underline{a}$ erzeugt,

$\boldsymbol{P}_3$, die den zweiten Schnittpunkt $x := \boldsymbol{P}_3(\underline{a}, (a), \gamma)$ einer konstruierten Geraden $\underline{a}$ und eines konstruierten Kreises γ erzeugt, wenn $\underline{a}$ und γ einen konstruierten Punkt a gemeinsam haben,

$\boldsymbol{P}_4$, die den zweiten Schnittpunkt $x := \boldsymbol{P}_4(\gamma, (a), \delta)$ zweier konstruierten Kreise γ und δ erzeugt, wenn γ und δ einen konstruierten Punkt a gemeinsam haben.

Wird die Menge orthogonal-rationaler Operationen mit OR bezeichnet, so heisse $H_{OR}(B)$ das *orthogonal-rationale Konstruktionsfeld* in H auf der Basis B.

Der folgende Satz wird hier nicht bewiesen; er ist schon ein altes Resultat, das in [4] bewiesen ist, aber teilweise und mit anderem Wortlaut schon von H. TIETZE [5] herrührt. TIETZE betrachtete damals nicht nur die Hilbertschen Konstruktionen, sondern alle klassischen Konstruktionen mit Zirkel und Lineal. Dabei sind aber die einwertigen Operationen dieselben wie hier.

Satz 4. Das orthogonal-rationale Konstruktionsfeld $H_{OR}(B)$ auf einer Basis $B = \{(0, 0), (1, 0), (\alpha_\lambda, \beta_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\}$ ist, insoweit es sich um Punkte, Geraden und Kreise mit Radius 1 handelt, genau das P-Halbfeld über Δ, $P = \Pi(\alpha_\lambda, \beta_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$, $\Delta = \Pi(\alpha_\lambda \mid \lambda \in \Lambda)$, $\Pi =$ Primkörper der rationalen Zahlen.

Korollar. $H_{OR}(B)$ kennt ausser der Identität keine B elementweise festlassenden Automorphismen.

Wenn die Operationen aus OR mittels Operationen aus Q ausgeführt werden, wird $\boldsymbol{P}_2$ bisweilen erweiternd als Hilfsoperation benutzt. Von den dadurch auftretenden Elementen mit eventuellen Konugierten kann man sich befreien, z. B. wenn man die orthogonal-rationale Operationen als Postulate zulässt. Wie bekannt, genügt dazu die Operationenmenge $OR = \{\boldsymbol{L}_1, \boldsymbol{P}_1, \boldsymbol{L}_3, \boldsymbol{C}'\}$, wenn die Anfangsmenge B mindestens drei nicht kollineare Punkte enthält; auch diese Bemerkung stimmt mit einem Ergebnis von H. TIETZE [6] überein. Im Folgenden nehmen wir als Postulat, dass die orthogonal-rationalen Operationen direkt ausführbar sind, also ohne Hilfe der Operation $\boldsymbol{P}_2$; $\boldsymbol{P}_2$ wird nur angewendet, falls sie unvermeidlich ist, d. h. entweder zur algebraischen Erweiterung eines P-Feldes oder P-Halbfeldes über Δ, oder zur rationalen Erweiterung eines P-Halbfeldes über Δ zum umfassenden P-Feld.

Beispiel. Anschliessend an Bemerkung 3, S. 5, kann man sagen, dass die Bildpunktemenge $M(K)$ in der komplexen Ebene eines Körpers K genau eine in einem orthogonal-rationalen Konstruktionsfeld enthaltene Punktmenge ist. Das bedeutet, dass die algebraischen Operationen konstruktiv mittels orthogonal-rationaler Operationen ausgeführt werden können. (Man vergleiche Aufgabe 192, Nieuw Archief voor Wiskunde, XVI-2, Juli 1968, S. 126, Groningen.)

Es sei jetzt die folgende Konstruktionsaufgabe vorgelegt: gegeben eine Menge B von Punkten, $B = \{(0, 0), (1, 0), (\alpha_\lambda, \beta_\lambda) \mid \lambda \in \Lambda\}$, und eine endliche Anzahl Punkte $p_\mu(\pi_\mu, \varrho_\mu)$, $\mu \in M$, mit $\pi_\mu, \varrho_\mu \in \Omega(P)$ für alle $\mu \in M$, so dass alle p_μ aus B mit Lineal und Eichmass konstruierbar sind. Gesucht ein Q-Programm führend von B zu einer Menge F, $F \supset B$, $p_\mu \in F$ für $\mu \in M$, unter der oben genannten Bedingung für die Anwendung von $\boldsymbol{P}_2$. Zur Lösung der Aufgabe denken wir die π_μ, ϱ_μ ausgedrückt in Quadratwurzeln vom Typus $\sqrt{1 + \theta^2}$. Wir konstruieren die *vollständige Figur* F_v, die aus B nach Anwendung der sukzessiven Operationen jenes Q-Programms entsteht, das man bekommt, wenn man das von B zu F führende Q-Programm in solcher Weise abändert, dass nach jeder erweiternden Operation $\boldsymbol{P}_2$ der Konstruktionsprozess in jeder der beiden möglichen Richtungen «vollständig» fortgesetzt wird, so dass mit jedem konstruierten Element auch alle Konjugierten F_v angehören.

Nach jeder $\boldsymbol{P}_2$ wird einer der erzeugten neuen Punkte B hinzugefügt. Es sei B^* die Menge, die aus B nach Hinzufügung aller solchen Punkte entsteht. Dementsprechend werden Λ zu Λ^*, Δ zu $\Delta^* = \Pi(\alpha_\lambda \mid \lambda \in \Lambda^*)$, P zu $P^* = \Pi(\alpha_\lambda, \beta_\lambda \mid \lambda \in \Lambda^*)$ erweitert. Sodann gelten die Sätze 5 und 6:

Satz 5. Ist n die kleinste Anzahl der verschiedenen Quadratwurzeln, die zur Berechnung der Koordinaten π_μ, ϱ_μ ausreichen, dann gibt es ein von B zu einer alle p_μ, $\mu \in M$, enthaltenden vollständigen Figur F_v führendes Q-Programm, worin entweder n oder $n + 1$ erweiternde Gabelungsoperationen $\boldsymbol{P}_2$ auftreten; F_v besitzt eine Gruppe von B elementweise festlassenden Automorphismen, entweder der

Ordnung 2^n und isomorph der Galois'schen Gruppe $\mathfrak{G}$ von P^* nach P, oder der Ordnung 2^{n+1} und isomorph dem direkten Produkt von $\mathfrak{G}$ und der Orientierungsgruppe $\mathfrak{D}$.

Beweis. Für jede neue Quadratwurzel muss im Q-Programm führend von B zu einer alle p_μ enthaltenden Figur F eine Operation $\boldsymbol{P}_2$ auftreten, und überdies kann eine Operation $\boldsymbol{P}_2$ notwendig sein als rational erweiternde Gabelungsoperation. Wenn man dieses Q-Programm in der oben beschriebenen Weise abändert, entsteht ein Q-Programm, das zu einer vollständigen Figur F_v führt. Das letzte Q-Programm enthält ebenfalls n oder $n+1$ Gabelungsoperationen $\boldsymbol{P}_2$.

Wir numerieren die im Programm auftretenden erweiternden Gabelungsoperationen der Reihe nach $(\boldsymbol{P}_2)^1, (\boldsymbol{P}_2)^2, \ldots, (\boldsymbol{P}_2)^i, \ldots, (\boldsymbol{P}_2)^N$. Wir nennen $B = B_0$; einer der beiden von $(\boldsymbol{P}_2)^i$ erzeugten Punkte, b_1^i, wird B_{i-1} hinzugefügt. Man betrachte jetzt die Reihe orthogonal-rationaler Konstruktionsfelder auf den B_i als Basen:

$$H_{OR}(B_0) \subset H_{OR}(B_1) \subset \cdots \subset H_{OR}(B_i) \subset \cdots \subset H_{OR}(B_N) = H_{OR}(B^*) .$$

Ein orthogonal-rationales Konstruktionsfeld besitzt ausser der Identität keinen seine Basis elementweise festlassenden Automorphismus; jede Erweiterung eines $H_{OR}(B_{i-1})$ zu dem $H_{OR}(B_i)$ ist algebraisch, bis auf höchstens eine, die rational sein kann. Also für alle Erweiterungen gilt Satz 2, ausgenommen vielleicht für eine, auf die sich Satz 3 anwenden lässt. Es gibt nun drei Möglichkeiten:

I. Die Zahl 1 ist ungerade in den β_λ, $\lambda \in \Lambda$, mit Koeffizienten aus Δ, und deshalb auch ungerade in den β_λ, $\lambda \in \Lambda^*$, mit Koeffizienten aus Δ^*.

Dann ist $H_{OR}(B_0)$ dem P-Feld, $H_{OR}(B^*)$ dem P^*-Feld gleich.

II. Die Zahl 1 ist weder ungerade in den β_λ, $\lambda \in \Lambda$, noch in den β_λ, $\lambda \in \Lambda^*$. Jetzt ist $H_{OR}(B_0)$ das P-Halbfeld über Δ, $H_{OR}(B^*)$ das P^*-Halbfeld über Δ^*.

In diesen beiden Fällen sind alle Erweiterungen algebraisch; die B elementweise festlassenden Automorphismen von F_v entsprechen 1–1-deutig den Automorphismen von $H_{OR}(B^*)$, die $H_{OR}(B)$ elementweise invariant lassen, und deswegen den Automorphismen von P^* in Bezug auf P. Weil F_v mit jedem Element auch alle Konjugierten enthält, ist P^* Galoissch über P. Die Automorphismengruppe von F_v nach B ist also der Galois'schen Gruppe von P^* nach P isomorph und hat Ordnung 2^n; also $N = n$.

III. Die Zahl 1 ist ungerade in den β_λ, $\lambda \in \Lambda^*$, aber nicht ungerade in den β_λ, $\lambda \in \Lambda$. $H_{OR}(B_0)$ ist das P-Halbfeld über Δ, $H_{OR}(B^*)$ ist das P^*-Feld. Die erweiternde Operation $\boldsymbol{P}_2$ ist jetzt im Q-Programm n-mal algebraisch und notwendig einmal rational erweiternd. In der Reihe der mit den $H_{OR}(B_i)$ korrespondierenden Körper

$$P = P_0 \subset P_1 \subset \ldots \subset P_i \subset \ldots \subset P_N = P^*$$

muss eins der Inklusionszeichen $\subset$ durch $=$ ersetzt werden.

Weil P^* kein Element $\varphi \neq 0$ enthält, das zugleich gerade und ungerade in den β_λ, $\lambda \in \Lambda$, ist, lässt jedes $\varepsilon \in P^*$ sich eindeutig $\varepsilon = \varepsilon' + \varepsilon''$, ε' gerade und ε'' ungerade in den β_λ, $\lambda \in \Lambda$, schreiben; ε' ist Nullstelle eines im Körper P irreduziblen Polynoms, mit Koeffizienten, die gerade in den β_λ, $\lambda \in \Lambda$, sind; deshalb sind alle konjugierten Elemente von ε' ebenfalls gerade in den β_λ, $\lambda \in \Lambda$. Genau so zeigt man, dass alle konjugierten Elemente von ε'' ungerade in den β_λ, $\lambda \in \Lambda$, sind.

Es sei nun $p\,(\pi_1' + \pi_1'', \pi_2' + \pi_2'')$, $\pi_1', \pi_1'', \pi_2', \pi_2'' \in P^*$, π_1' und π_2' gerade, π_1'' und π_2'' ungerade in den β_λ, $\lambda \in \Lambda$, ein Punkt im P^*-Feld; es sei ferner $\mathfrak{a}\,p = q\,(\varkappa_1' + \varkappa_1'', \varkappa_2' + \varkappa_2'')$, wo $\mathfrak{a}$ irgendein Automorphismus des P^*-Feldes in Bezug auf das P-Halbfeld über Λ darstellt. Dann ist $\mathfrak{a}$ das Produkt eines Automorphismus $\mathfrak{g}$ des Körpers P^* nach P und eines Automorphismus $\mathfrak{d}$ des P-Feldes nach dem P-Halbfeld über Λ. Wegen der Eindeutigkeit der Repräsentation $\varepsilon = \varepsilon' + \varepsilon''$ ist auch die Darstellung $\mathfrak{a} = \mathfrak{g} \cdot \mathfrak{d}$ eindeutig. Überdies kommutieren $\mathfrak{g}$ und $\mathfrak{d}$, so dass die Automorphismengruppe des P^*-Feldes nach dem P-Halbfeld über Λ das direkte Produkt von $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{D}$ ist. Für jedes i enthält F_v Elemente, die $H_{OR}(B_i)$ aber nicht $H_{OR}(B_{i-1})$ angehören, also ist die Automorphismengruppe von F_v nach B der Gruppe $\mathfrak{G} \otimes \mathfrak{D}$ isomorph; sie hat die Ordnung 2^{n+1}, also $N = n + 1$. Wiederum ist P^* Galoisch über P, so dass $\mathfrak{G}$ die Galois'sche Gruppe von P^* nach P ist.

Satz 6. Ist in der Aufgabe nur von einem gefragten Punkt $p(\pi, \varrho)$ die Rede und ist n die kleinste Anzahl der Quadratwurzeln, die hierbei zur Berechnung der Koordinaten π, ϱ ausreichen, dann hat p entweder 2^n Konjugierte in Bezug auf B, wobei die Koordinaten x, y aller Konjugierten durch in P irreduzible Gleichungen zu bestimmen sind, oder p hat 2^{n+1} Konjugierte in Bezug auf B, wobei die Koordinaten x, y aller Konjugierten als Nullstellen zweier Polynome, deren höchstens eins in P irreduzibel und mindestens eins in P reduzibel aber dem Produkt zweier in P irreduzibelen Faktoren gleich ist, bestimmt werden können. Der letzte Fall kommt dann und nur dann vor, wenn 1 ungerade in den β_λ und ϱ zusammen, aber nicht ungerade in den β_λ ist.

Beweis. Es sei $B^+ = B \cup \{p\}$, und es seien $P^+ = P(\pi, \varrho)$ und $\Lambda^+ = \Lambda(\pi)$; der Zerfällungskörper der beiden in P irreduzibelen Polynome mit Nullstellen π, bzw. ϱ, heisse P^*. Wir betrachten jetzt ein solches Q-Programm, führend von B zu einer vollständigen Figur F, $p \in F$, welches eine minimale Anzahl erweiternder Operationen $\boldsymbol{P_2}$ enthält. Dann ist das kleinste orthogonal-rationale Konstruktionsfeld, das B, p, und alle Konjugierte von p enthält, entweder das P^*-Feld oder das P^*-Halbfeld über einem Unterkörper. Es gibt nun dieselben drei Fälle wie im vorigen Satz:

I. 1 ist ungerade in den β_λ; dann ist $H_{OR}(B)$ das P-Feld, $H_{OR}(B^+)$ das P^+-Feld, und $H_{OR}(B^*)$ das P^*-Feld.

II. 1 ist nicht ungerade in den β_λ, und auch nicht ungerade in den β_λ und ϱ zusammen, mit Koeffizienten in $\Lambda(\pi)$; $H_{OR}(B)$ ist das P-Halbfeld über Λ; das P^*-Halbfeld über Λ^* genügt, damit p und seine Konjugierte darin enthalten sind. Dieses ist also $H_{OR}(B^*)$.

In diesen beiden Fällen entsprechen die Automorphismen von $H_{OR}(B^*)$ in Bezug auf B 1–1-deutig den Automorphismen von P^* nach P; das Q-Programm enthält n Operationen $\boldsymbol{P_2}$, alle algebraisch erweiternd; p hat 2^n Konjugierte und die definierenden Gleichungen für die x und y dieser Konjugierten sind die in P irreduzibelen Gleichungen mit Nullstellen π, bzw. ϱ.

III. 1 ist nicht ungerade in den β_λ, aber 1 ist ungerade in den β_λ und ϱ zusammen, mit Koeffizienten in $\Lambda(\pi)$. Jetzt ist $H_{OR}(B)$ das P-Halbfeld über Λ, aber $H_{OR}(B^+)$ das P^+-Feld und, weil $H_{OR}(B^+) \subset H_{OR}(B^*)$, auch $H_{OR}(B^*)$ das P^*-Feld. Ausser den algebraischen hat p auch jene Konjugierte, die durch die Automorphismen von $H_{OR}(B^*)$ aus der Orientationsgruppe $\mathfrak{D}$ erzeugt werden. Demnach ist die Anzahl Konjugierter 2^{n+1}.

Wir schreiben $p = (\pi, \varrho) = (\pi' + \pi'', \varrho' + \varrho'')$, $\pi', \pi'', \varrho', \varrho'' \in P^*$, π' und ϱ' gerade, π'' und ϱ'' ungerade in den β_λ (wobei nicht π'' und ϱ' beide verschwinden, sonst wäre 1 nicht ungerade in den β_λ und ϱ zusammen).

Ist nun $f(x) = f'(x) + f''(x)$ das in P irreduzible Polynom mit Nullstelle π, die Koeffizienten von f' gerade, die von f'' ungerade in den β_λ, dann ist, wenn $\pi'' \neq 0$, weder f' noch f'' gleich null; und die definierende Gleichung für die Abszissen x der zu p konjugierten Punkte ist

$$\{f'(x) + f''(x)\}\{f'(x) - f''(x)\} = 0 .$$

(Einfaches Kontrollmittel: die Ersetzung der β_λ durch $-\beta_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$, permutiert die konjugierten Abszissen.)

Es sei $g(y) = g'(y) + y\,g''(y)$ das in P irreduzible Polynom mit Nullstelle ϱ, sowohl g' wie auch g'' gerade *in den β_λ und y zusammen;* wenn $\varrho' \neq 0$ ist, so ist weder g' noch g'' gleich null. Und die definierende Gleichung für die Ordinaten y der zu p konjugierten Punkte lautet

$$\{g'(y) + y\,g''(y)\}\{-g'(y) + y\,g''(y)\} = 0 .$$

(Kontrollmittel: die Ersetzung der β_λ durch $-\beta_\lambda$, $\lambda \in \Lambda$, permutiert die konjugierten Ordinaten unter gleichzeitiger Zeichenwende.)

Hiermit ist der Satz bewiesen.

Schlussbemerkungen

1. Wir geben die folgende Verbesserung des Hilbertschen Satzes 65 ([3], S. 121): «Es sei eine geometrische Konstruktionsaufgabe vorgelegt von der Art, dass man bei analytischer Behandlung derselben die Koordinaten der gesuchten Punkte aus denen der gegebenen Punkte lediglich durch rationale Operationen und durch Ziehen von Quadratwurzeln finden kann; es sei B die Menge der gegebenen Punkte mit Koordinaten $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(\alpha_\lambda, \beta_\lambda)$, $\lambda \in \Lambda$, Λ irgendeine Indizenmenge; es sei jedem gesuchten Punkt 1–1-deutig eine Lösung der Aufgabe zugeordnet; die Menge der gesuchten Punkte sei die Vereinigung von k nichtleeren Teilmengen M_i, $i = 1, 2 \ldots, k$, von (im allgemeinen) gegenseitig über B konjugierten Punkten, und es sei n_i die kleinste Anzahl der Quadratwurzeln, die zur Berechnung der Koordinaten eines Repräsentanten $p_i \in M_i$ ausreichen; soll nun die Aufgabe sich allein durch Ziehen von Geraden und Abtragen von Strecken ausführen lassen, so ist dafür notwendig und hinreichend, dass die geometrische Aufgabe bei Einbeziehung des Unendlichfernen für $i = 1, 2, \ldots, k$ entweder 2^{n_i} oder 2^{n_i+1} Lösungen besitzt, nämlich dann und nur dann 2^{n_i+1}, wenn sich mittels orthogonal-rationaler Operationen ein Quadrat aus $B \cup \{p_i\}$ aber nicht aus B allein konstruieren lässt, und zwar für alle Werte der Parameter α_λ und β_λ.»

Es sei nachdrücklich bemerkt, dass es sich hier um solche Konstruktionsaufgaben handelt, in denen keine Anordnungs- oder Orientierungsbedingungen enthalten sind.

2. Die Bemerkung Hilberts am Ende des § 37 betrifft die Konstruierbarkeit mittels Lineals und Eichmasses der mittels Zirkels und Lineals konstruierbaren regulären Polygone; Hilbert geht nicht auf die Anzahl der Lösungen ein. Hieran kann man aber

sehr deutlich die neue Fassung des Satzes verifizieren. Ist nämlich die Aufgabe: gegeben $B = \{(0, 0), a(1, 0)\}$, (also $H_{OR}(B)$ ist das $\Pi(0)$-Halbfeld über Π), gesucht ein im Einheitskreis eingeschriebenes reguläres N-Eck, wovon a ein Winkelpunkt sei. Zur Anwendung des Satzes ordnen wir jeder Lösung den «ersten Punkt nach $\underline{a}$» zu. Man findet:

N	Koordinaten des «ersten» Punktes	Anzahl Wurzelzeichen	Fall	Anzahl Lösungen = Anzahl Konjugierten des «ersten» Punktes
3	$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$	1	II[1])	$2^1 = 2$
4	(0, 1)	0	III	$2^{0+1} = 2$
5	$\left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{5}, \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)$	2	II	$2^2 = 4$
6	$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{3}\right)$	1	II[1])	$2^1 = 2$
8	$\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}\right)$	1	III	$2^{1+1} = 4$
10	$\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\sqrt{5}, \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}}\right)$	2	II	$2^2=4$
12	$\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2}\right)$	1	III	$2^{1+1} = 4$
..	...	...	...	...

3. Eine axiomatische Grundlegung der orthogonal-rationalen Konstruktionsfelder findet man z.B. bei Bachmann [1]. Es handelt sich hier um die dort beschriebenen Euklidischen Geometrien. Ein P-Halbfeld über Δ genügt den Axiomen des Systems aus § 3, 2 und den beiden Zusatzaxiomen R^* und V^* (S. 201), ein P-Feld überdies dem Zusatzaxiom auf S. 215, wonach der Übergang zur Hilbertschen Geometrie nach Hinzufügung des Zusatzaxioms auf S. 216 erreicht wird.

D. KIJNE, TU Eindhoven

LITERATURVERZEICHNIS

[1] F. BACHMANN, *Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff* (Berlin, Göttingen und Heidelberg 1959).
[2] L. BIEBERBACH, *Theorie der geometrischen Konstruktionen* (Basel 1952).
[3] D. HILBERT, *Grundlagen der Geometrie* (Leipzig 1903), Neunte Aufl. (Stuttgart 1962).
[4] D. KIJNE, *Plane Construction Field Theory*, Diss. Utrecht, 1956.
[5] H. TIETZE, *Über die Konstruierbarkeit mit Lineal und Zirkel*, Sitzungsber. Kais. Akad. Wiss., Wien, Abt. IIa, S. 735–757 (1909).
[6] H. TIETZE, *Über die mit Lineal und Zirkel und die mit dem rechten Zeichenwinkel lösbaren Konstruktionsaufgaben I*, Math. Z. *46*, 190–203 (1940).

[1]) Siehe z.B. [2], S. 12.