

Kleine Mitteilung

Objektyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **26 (1971)**

Heft 1

PDF erstellt am: **05.07.2024**

Nutzungsbedingungen

Die ETH-Bibliothek ist Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Inhalten der Zeitschriften. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern.

Die auf der Plattform e-periodica veröffentlichten Dokumente stehen für nicht-kommerzielle Zwecke in Lehre und Forschung sowie für die private Nutzung frei zur Verfügung. Einzelne Dateien oder Ausdrucke aus diesem Angebot können zusammen mit diesen Nutzungsbedingungen und den korrekten Herkunftsbezeichnungen weitergegeben werden.

Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Die systematische Speicherung von Teilen des elektronischen Angebots auf anderen Servern bedarf ebenfalls des schriftlichen Einverständnisses der Rechteinhaber.

Haftungsausschluss

Alle Angaben erfolgen ohne Gewähr für Vollständigkeit oder Richtigkeit. Es wird keine Haftung übernommen für Schäden durch die Verwendung von Informationen aus diesem Online-Angebot oder durch das Fehlen von Informationen. Dies gilt auch für Inhalte Dritter, die über dieses Angebot zugänglich sind.

Ein Dienst der *ETH-Bibliothek*
ETH Zürich, Rämistrasse 101, 8092 Zürich, Schweiz, www.library.ethz.ch

<http://www.e-periodica.ch>

Kleine Mitteilung

Zwei Resultate über Trigonalzahlen

Die Gesamtheit der Lösungen (x, y, z) der Gleichung $x^2 + y^2 = z^2$ in natürlichen und teilerfremden Zahlen x, y, z mit geradem y und ungeraden x, z ist vollständig bekannt (vgl. etwa [2], S. 41, Theorem 1). Jede derartige Lösung heisse ein primitives pythagoreisches Tripel, kurz p. p. T. Ferner bezeichne $t_h = h(h+1)/2$ für $h = 0, 1, \dots$ die h -te Trigonalzahl.

KHATRI [1] hat gefunden, dass für alle $k = 0, 1, \dots$ folgende drei Relationen bestehen:

$$t_{3k} + t_{4k+1} = t_{5k+1}; \quad t_{5k+4} + t_{12k+9} = t_{13k+10}; \quad t_{15k+9} + t_{8k+4} = t_{17k+10}. \quad (0)$$

Dabei ist jedes der $(3, 4, 5)$, $(5, 12, 13)$, $(15, 8, 17)$ ein p. p. T. Man wird vermuten, dass hinter den Identitäten (0) allgemeinere Gesetzmässigkeiten stehen; diese sind präzisiert in

Satz 1. *Zu jedem p. p. T. (p_1, p_2, p_3) gibt es genau zwei verschiedene Tripel (q_{1j}, q_{2j}, q_{3j}) ($j = 1, 2$) ganzer Zahlen mit $0 \leq q_{ij} < p_i$ ($i = 1, 2, 3; j = 1, 2$) derart, dass für alle $k = 0, 1, \dots$ gilt*

$$t_{p_1 k + q_{1j}} + t_{p_2 k + q_{2j}} = t_{p_3 k + q_{3j}} \quad (j = 1, 2). \quad (1)$$

Der Beweis dieses Satzes zeigt, dass und wie sich zu vorgegebenem p. p. T. (p_1, p_2, p_3) die beiden Tripel (q_{1j}, q_{2j}, q_{3j}) effektiv berechnen lassen.

SIERPIŃSKI [3] hat die Aufgabe gestellt zu zeigen, dass sich zu jeder natürlichen Zahl m eine Trigonalzahl finden lässt, die sich mindestens auf m Arten als Summe zweier Trigonalzahlen schreiben lässt. Der folgende aus Satz 1 abgeleitete Satz 2 verschärft diese Aussage erheblich.

Satz 2. *Zu jeder natürlichen Zahl m gibt es unendlich viele Trigonalzahlen, die sich auf mindestens m verschiedene Arten als Summe zweier Trigonalzahlen darstellen lassen.*

Beweis von Satz 1. (1) ist gleichbedeutend mit der Forderung

$$(p_1^2 + p_2^2 - p_3^2) k^2 + ((2q_1 + 1)p_1 + (2q_2 + 1)p_2 - (2q_3 + 1)p_3) k + q_1(q_1 + 1) + q_2(q_2 + 1) - q_3(q_3 + 1) = 0 \quad (2)$$

für $k = 0, 1, \dots$; dabei wurde der zweite Index j der q 's unterdrückt. Da (p_1, p_2, p_3) ein p. p. T. ist, verschwindet der Koeffizient von k^2 in (2) und (2) zerfällt in die beiden Forderungen

$$p_3 q_3 - p_1 q_1 - p_2 q_2 = (p_1 + p_2 - p_3)/2; \quad (3a)$$

$$q_1(q_1 + 1) + q_2(q_2 + 1) - q_3(q_3 + 1) = 0. \quad (3b)$$

Berechnen wir q_3 aus (3a) und setzen den entsprechenden Ausdruck in (3b) ein, so erhalten wir nach einigen Umformungen folgende quadratische Gleichung

$$U^2 + (p_2 - p_1)U - p_1 p_2 / 2 = 0 \quad \text{mit} \quad U = p_2 q_1 - p_1 q_2, \quad (4)$$

die folgende Lösungen hat

$$p_2 q_{1j} - p_1 q_{2j} = (p_1 - p_2 + (-1)^j p_3) / 2 \quad (j = 1, 2). \quad (5)$$

Es sei angemerkt, dass rechts in (3a) und (5) ganze Zahlen stehen. Da (p_1, p_2, p_3) als p. p. T. vorausgesetzt wurde, sind p_1 und p_2 teilerfremd. Bekanntlich kann man daher für $j = 1, 2$ eine Lösung (q_{1j}^0, q_{2j}^0) von (5) aus der regulären Kettenbruchentwicklung der rationalen Zahl $-p_2/p_1$ finden. Alle ganzzahligen Lösungen (q_{1j}, q_{2j}) von (5) ergeben sich dann in der Form $q_{1j} = q_{1j}^0 + t p_1$, $q_{2j} = q_{2j}^0 + t p_2$, wo t alle ganzen Zahlen durchläuft. Daher kann man für $j = 1, 2$ genau eine Lösung (q_{1j}, q_{2j}) von (5) finden mit $0 \leq q_{1j} \leq p_1 - 1$. Wir haben noch $0 \leq q_{2j} < p_2$ für $j = 1, 2$ zu zeigen: Wegen $p_1 < p_3 < p_1 + p_2$ liefert (5) für $j = 1$

$$0 < p_1 q_{21} = p_2 q_{11} + (p_2 + p_3 - p_1) / 2 \leq p_1 p_2 + (p_3 - p_1 - p_2) / 2 < p_1 p_2,$$

was $0 \leq q_{21} < p_2$ impliziert. Für $j = 2$ ergibt (5): $p_1 q_{22} = p_2 q_{12} + (p_2 - p_1 - p_3)/2$. Wegen $q_{12} \geq 0$ und $p_3 < p_1 + p_2$ folgt hieraus $p_1 q_{22} > -p_1$, was $q_{22} \geq 0$ nach sich zieht. Andererseits erhält man $p_1 q_{22} \leq p_1 p_2 - (p_1 + p_2 + p_3)/2 < p_1 p_2$, was wieder $q_{22} < p_2$ liefert. (Man kann übrigens sogar $1 \leq q_{2j} \leq p_2 - 2$ für $j = 1, 2$ erhalten.)

Jeder ganzzahligen Lösung (q_{1j}, q_{2j}) von (5) entspricht vermöge (3a) genau ein rationales q_{3j} , das nach (3b) auch ganzalgebraisch (vom zweiten Grad) ist. Daher ist q_{3j} ganzrational; wir haben noch $0 \leq q_{3j} < p_3$ zu zeigen. Wegen (3a) und $p_1 + p_2 > p_3$ ist sogar $q_{3j} \geq 1$; weiter folgt aus (3a) sowie $q_{ij} \leq p_i - 1$ für $i = 1, 2$:

$$p_3 q_{3j} \leq p_1(p_1 - 1) + p_2(p_2 - 1) + (p_1 + p_2 - p_3)/2 = p_3^2 - (p_1 + p_2 + p_3)/2 < p_3(p_3 - 1),$$

was sogar $q_{3j} \leq p_3 - 2$ impliziert. Wegen (5) ist ersichtlich $(q_{11}, q_{21}) \neq (q_{12}, q_{22})$, so dass erst recht $(q_{11}, q_{21}, q_{31}) \neq (q_{12}, q_{22}, q_{32})$ ist, womit Satz 1 vollständig bewiesen ist.

Beispiel. Gehen wir vom p. p. T. (3, 4, 5) aus und nehmen (5) für $j = 1$, so wird aus (5): $4 q_{11} - 3 q_{21} = -3$, was $q_{11} = 0, q_{21} = 1$ impliziert. Diese Werte in (3a) eingesetzt liefern $q_{31} = 1$ und wir erhalten aus (1) die erste Identität (0) von KHATRI. Analog erhalten wir aus (5) für $j = 2$ die Identität $t_{3k+2} + t_{4k+2} = t_{5k+3}$ für $k = 0, 1, \dots$.

Beweis von Satz 2. Ist $m = 1$, so liefert jede der Relationen (0) unsere Behauptung. Sei jetzt $m \geq 2$. Für alle $n = 1, \dots, m$ ist $(p_{1,n}, p_{2,n}, p_{3,n}) = (2^{2^n} - 1, 2^{2^{n-1}+1}, 2^{2^n} + 1)$ ein p. p. T. Jedem derartigen Tripel ordnen wir eines der beiden nach Satz 1 existierenden q -Tripel zu, das wir mit $(q_{1,n}, q_{2,n}, q_{3,n})$ bezeichnen, derart, dass gilt

$$t_{p_{1,n}k_n + q_{1,n}} + t_{p_{2,n}k_n + q_{2,n}} = t_{p_{3,n}k_n + q_{3,n}} \quad (6)$$

für alle $k_n = 0, 1, \dots; n = 1, \dots, m$.

Aus bekannten Eigenschaften der Fermat-Zahlen folgt die Teilerfremdheit von $p_{3,n}$ und $p_{3,n'}$ für $1 \leq n, n' \leq m, n \neq n'$. Daher gibt es nach dem Chinesischen Restsatz genau eine ganze Zahl Q mit $0 \leq Q < \prod_{n=1}^m p_{3,n} (= P)$ derart, dass simultan die Kongruenzen

$$Q \equiv q_{3,n} \pmod{p_{3,n}} \quad (n = 1, \dots, m)$$

bestehen. Dies heisst: Es gibt eindeutig bestimmte k_n^0 ($n = 1, \dots, m$) mit $0 \leq k_n^0 < P/p_{3,n}$ derart, dass gilt

$$Q = p_{3,n} k_n^0 + q_{3,n} \quad (n = 1, \dots, m). \quad (7)$$

Für jedes $n = 1, \dots, m$ betrachten wir nur noch die

$$k_n = r P/p_{3,n} + k_n^0, \quad r = 0, 1, \dots \quad (8)$$

entsprechenden Gleichungen (6) weiter. Setzen wir für $j = 1, 2$ abkürzend

$$p_{j,n} P/p_{3,n} = P_j^{(n)}, \quad p_{j,n} k_n^0 + q_{j,n} = Q_j^{(n)},$$

so behalten wir aus der Menge der Gleichungen (6) mit Rücksicht auf (7) und (8) also nur noch die $r = 0, 1, \dots$ entsprechenden Gleichungen (9) bei:

$$t_{rP_1^{(n)} + Q_1^{(n)}} + t_{rP_2^{(n)} + Q_2^{(n)}} = t_{rP + Q} \quad (n = 1, \dots, m). \quad (9)$$

Nun bemerken wir, dass für $j, j' = 1, 2$ gilt: $P_j^{(n)} \neq P_{j'}^{(n')}$ für alle Paare (n, n') mit $1 \leq n, n' \leq m$ und $n \neq n'$. Sonst wäre nämlich $p_{3,n'} p_{j,n} = p_{3,n} p_{j',n'}$; da $p_{3,n}$ und $p_{3,n'}$ teilerfremd sind, folgt $p_{3,n} \mid p_{j,n}$, was nicht geht. Da ausserdem $P_1^{(n)} \neq P_2^{(n)}$ für $n = 1, \dots, m$ gilt, sind sämtliche $2m$ Zahlen $P_j^{(n)}$ ($j = 1, 2; n = 1, \dots, m$) voneinander verschieden.

Schliesslich zeigen wir: Ist $r \geq P$, so ist $r P_j^{(n)} + Q_j^{(n)} \neq r P_{j'}^{(n')} + Q_{j'}^{(n')}$ für $j = 1, 2$ und $1 \leq n, n' \leq m$ mit $n \neq n'$. Sonst könnte man o. B. d. A. $P_j^{(n)} > P_{j'}^{(n')}$ voraussetzen und hätte dann $P \leq r (P_j^{(n)} - P_{j'}^{(n')}) = Q_{j'}^{(n')} - Q_j^{(n)}$, was wegen $0 \leq Q_j^{(n)}, Q_{j'}^{(n')} < P$ nicht sein

kann. Daher lässt sich für jedes ganze r mit $r \geq P$ die Trigonalzahl t_{rP+Q} nach (9) auf mindestens m verschiedene Arten als Summe zweier Trigonalzahlen darstellen, was Satz 2 beweist.

PETER BUNDSCHUH, Freiburg i. Br.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] KHATRI, M. N.: *Triangular Numbers and Pythagorean Triangles*, Scripta Math. 21, 94 (1955).
- [2] SIERPIŃSKI, W.: *Elementary Theory of Numbers*, Wroclawska Drukarnia Naukowa (Warszawa 1964).
- [3] SIERPIŃSKI, W.: *Aufgabe 617*, El. Math. 25, 19 (1970).

Aufgaben

Aufgabe 606. Eine notwendige Bedingung für die Existenz von drei linear unabhängigen periodischen Lösungen von

$$x''' - \frac{p'}{p} x'' + (1 + p^2) x' - \frac{p'}{p} x = 0, \quad p(t + \omega) = p(t), \quad p(t) \neq 0 \quad (1)$$

ist

$$\int_0^\omega \sqrt{1 + p^2} dt > 2\pi. \quad (2)$$

H. Guggenheimer, Polytechnic Institute of Brooklyn

Lösung des Aufgabenstellers: Es seien drei linear unabhängige periodische Lösungen von (1) gegeben. Dann sind alle Lösungen von (1) periodisch. Daher gibt es einen periodischen Vektor $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ mit den Anfangsbedingungen $\mathbf{x}(0) = \mathbf{e}_1^0$, $\mathbf{x}'(0) = \mathbf{e}_2^0$, $\mathbf{x}''(0) = -\mathbf{e}_1^0 + p(0) \mathbf{e}_3^0$; $\mathbf{e}_i^0 \cdot \mathbf{e}_j^0 = \delta_{ij}$. Die Anfangsbedingungen bestimmen $\mathbf{x}(t)$ eindeutig.

Man integriere das System

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & p \\ 0 & -p & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_i(0) = \mathbf{e}_i^0. \quad (3)$$

Die (vollständig stetige) Lösung ist sogar für integrables, also sicher für differenzierbares p eindeutig. Durch Elimination folgt, dass $\mathbf{e}_1(t)$ die Gleichung (1) erfüllt. Daher $\mathbf{x} = \mathbf{e}_1$.

Da die Matrix in (3) schiefsymmetrisch ist, folgt $\mathbf{e}_i(t) \cdot \mathbf{e}_j(t) = \delta_{ij}$ wegen $(d/dt)(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j) = 0$. Also ist $\|\mathbf{e}_1(t)\| = 1$, und $\mathbf{e}_1(t)$ beschreibt eine sphärische Kurve der Krümmung $\|\mathbf{e}_1''\| = \sqrt{1 + p^2}$.

Nach Fenchels Theorem folgt (2); das Gleichheitszeichen stünde für ebene Kurven, die hier ausgeschlossen sind.