Aufgaben

Objekttyp: **Group**

Zeitschrift: **Elemente der Mathematik**

Band (Jahr): **26 (1971)**

Heft 1

PDF erstellt am: **26.07.2024**

kann. Daher lässt sich für jedes ganze r mit $r \geqslant P$ die Trigonalzahl t_{rP+Q} nach (9) auf mindestens m verschiedene Arten als Summe zweier Trigonalzahlen darstellen, was Satz 2 beweist.

PETER BUNDSCHUH, Freiburg i. Br.

LITERATURVERZEICHNIS

[1] KHATRI, M. N.: *Triangular Numbers and Pythagorean Triangles*, Scripta Math. *21*, 94 (1955).

[2] SIERPIŃSKI, W.: *Elementary Theory of Numbers*, Wroclawska Drukarnia Naukowa (Warszawa 1964).

[3] SIERPIŃSKI, W.: *Aufgabe 617*, El. Math. *25*, 19 (1970).

Aufgaben

Aufgabe 606. Eine notwendige Bedingung für die Existenz von drei linear unabhängigen periodischen Lösungen von

$$x''' - \frac{p'}{p} x'' + (1 + p^2)\, x' - \frac{p'}{p} x = 0\,, \qquad p\,(t + \omega) = p(t)\,, \qquad p(t) \neq 0 \tag{1}$$

ist

$$\int_0^{\omega} \sqrt{1 + p^2}\, dt > 2\pi\,. \tag{2}$$

H. Guggenheimer, Polytechnic Institute of Brooklyn

Lösung des Aufgabenstellers: Es seien drei linear unabhängige periodische Lösungen von (1) gegeben. Dann sind alle Lösungen von (1) periodisch. Daher gibt es einen periodischen Vektor $\boldsymbol{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$ mit den Anfangsbedingungen $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{e}_1^0$, $\boldsymbol{x}'(0) = \boldsymbol{e}_2^0$, $\boldsymbol{x}''(0) = -\boldsymbol{e}_1^0 + p(0)\, \boldsymbol{e}_3^0$; $\boldsymbol{e}_i^0 \cdot \boldsymbol{e}_j^0 = \delta_{ij}$. Die Anfangsbedingungen bestimmen $\boldsymbol{x}(t)$ eindeutig.

Man integriere das System

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & p \\ 0 & -p & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \boldsymbol{e}_1 \\ \boldsymbol{e}_2 \\ \boldsymbol{e}_3 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{e}_i(0) = \boldsymbol{e}_i^0\,. \tag{3}$$

Die (vollständig stetige) Lösung ist sogar für integrables, also sicher für differenzierbares p eindeutig. Durch Elimination folgt, dass $\boldsymbol{e}_1(t)$ die Gleichung (1) erfüllt. Daher $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{e}_1$.

Da die Matrix in (3) schiefsymmetrisch ist, folgt $\boldsymbol{e}_i(t) \cdot \boldsymbol{e}_j(t) = \delta_{ij}$ wegen $(d/dt)(\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j) = 0$. Also ist $\| \boldsymbol{e}_1(t) \| = 1$, und $\boldsymbol{e}_1(t)$ beschreibt eine sphärische Kurve der Krümmung $\| \boldsymbol{e}_1'' \| = \sqrt{1 + p^2}$.

Nach Fenchels Theorem folgt (2); das Gleichheitszeichen stünde für ebene Kurven, die hier ausgeschlossen sind.

Aufgabe 614. Wird

$$e_n(m) = \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{(k+m)(k+m+1)\dots(k+2m)} \qquad (m \geqslant 0 \text{ ganz})$$

als reduzierter Bruch dargestellt und ist $\alpha_n(m)$ der Exponent von 2 in der Primzahlpotenzzerlegung des Zählers, so gilt für jedes m

$$\alpha_n(m) \to \infty \text{ für } n \to \infty .$$

(Aufgabe 551 behandelte den Fall $m = 0$). E. Teuffel, Korntal/Stuttgart

Solution: Since

$$\frac{1}{x(x+1)\dots(x+m)} = \frac{1}{m!} \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \frac{\binom{m}{j}}{x+j},$$

it follows that

$$\begin{aligned}
e_n(m) &= \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{(k+m)(k+m+1)\dots(k+2m)} \\
&= \frac{1}{m!} \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \binom{m}{j} \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k+m+j} \\
&= \frac{1}{m!} \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \binom{m}{j} 2^{-m-j} \left\{ \sum_{k=1}^{n+m+j} \frac{2^k}{k} - \sum_{k=1}^{m+j} \frac{2^k}{k} \right\} \\
&= \frac{1}{m!} \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \binom{m}{j} 2^{-m-j} e_{m+j+n}(0) - R_m ,
\end{aligned}$$

where

$$R_m = \frac{1}{m!} \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \binom{m}{j} 2^{-m-j} \sum_{k=1}^{m+j} \frac{2^k}{k}.$$

In the next place, since

$$\frac{1}{k} = \int_0^1 x^{k-1}\, dx ,$$

we have

$$\begin{aligned}
R_m &= \frac{1}{m!} \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \binom{m}{j} 2^{-m-j} \sum_{k=1}^{m+j} 2^k \int_0^1 x^{k-1}\, dx \\
&= \frac{2}{m!} \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \binom{m}{j} 2^{-m-j} \int_0^1 \frac{1-(2x)^{m+j}}{1-2x}\, dx \\
&= \frac{2}{m!} \int_0^1 \frac{2^{-2m} - x^m (1-x)^m}{1-2x}\, dx \\
&= \frac{2^{1-2m}}{m!} \int_0^1 \frac{1 - 2^{2m} x^m (1-x)^m}{1-2x}\, dx .
\end{aligned}$$

If we make the substitution $t = 1 - 2x$, we get

$$R_m = \frac{2^{-2m}}{m!} \int_{-1}^{1} \frac{1 - (1 - t^2)^m}{t} \, dt = 0 \, .$$

Therefore

$$e_n(m) = \frac{1}{m!} \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \binom{m}{j} 2^{-m-j} e_{m+j+n}(0) \, .$$

Since, by Aufgabe 551 (El. Math. *23*, 67 (1968))

$$\alpha_n(0) \to \infty \text{ as } n \to \infty \, ,$$

it follows at once that

$$\alpha_n(m) \to \infty \text{ as } n \to \infty \, .$$

L. Carlitz, Duke University, USA

Weitere Lösungen sandten P. Bundschuh (Freiburg i. Br.) und J. Fehér (Pécs, Ungarn).

Aufgabe 615. Prove the inequalities

$$n = 1, 2, 3, \ldots \Rightarrow \sqrt[n]{(n+1)!} \geqslant 1 + \sqrt[n]{n!} \, , \quad \sqrt[n]{(n+1)!!} \geqslant 1 + \sqrt[n]{n!!}$$

where $n!! = 1! \cdot 2! \cdot \ldots \cdot n!$.

Ž. Mitrović, Vranje (Yugoslavia)

Lösung: Die beiden Ungleichungen sind im wesentlichen Spezialfälle der Ungleichung

$$\sqrt[n]{(1 + a_1) \ldots (1 + a_n)} \geqslant 1 + \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} \, , \tag{1}$$

$n \geqslant 1$, $a_i > 0$ für $i = 1, 2, \ldots, n$ (Problem Nr. 305 in: Shklarsky, Chentzov, Yaglom: «The USSR Olympiad Problem Book», Freeman and Company, San Francisco and London 1962). Die erste Ungleichung ergibt sich aus (1), wenn man darin $a_i = i$ für $i = 1, 2, \ldots, n$ setzt; die zweite, wenn man $a_i = i!$ für $i = 1, 2, \ldots, n$ setzt, und anschliessend auf die linke Seite die Ungleichungen $1 + i! \leqslant (i + 1)!$ anwendet.

P. Hohler, Dietikon

Weitere Lösungen sandten P. Bundschuh (Freiburg i. Br.), J. Fehér (Pécs, Ungarn), O. Reutter (Ochsenhausen) und E. Teuffel (Korntal/Stuttgart).

Anmerkung der Redaktion: (1) ist ein Korollar der Maclaurinschen Ungleichung zwischen den elementarsymmetrischen Mitteln der Zahlen a_i. P. Bundschuh leitet die Behauptungen aus der Ungleichung

$$x_i, y_i \geqslant 0 \ (i=1, \ldots, n) \Rightarrow \left(\prod_{i=1}^{n} (x_i + y_i)\right)^{1/n} \geqslant \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n} + \left(\prod_{i=1}^{n} y_i\right)^{1/n}$$

(vgl. E. F. Beckenbach and R. Bellman, Inequalities. Berlin–Heidelberg–New York: Springer 1965, 2nd printing, p. 26, Theorem 7) her. O. Reutter beweist allgemeiner: Ist f eine auf der Menge N der natürlichen Zahlen definierte Funktion mit den Eigenschaften $f(1) \geqslant 1$ und $f(n+1) \geqslant f(n)$ für alle $n \in N$, dann ist

$$\sqrt[n]{(n+1)!\, f(n+1)} \geqslant 1 + \sqrt[n]{n!\, f(n)} \text{ für alle } n \in N\,.$$

Aufgabe 616. Show that for $m > 3$ the Diophantine equation

$$x^{2^{m-2}} + y^{2^{m-2}} = p\, z^{2^{m-2}}$$

has no solution with coprime integers x, y, z if $p \not\equiv 1$ or $2 \pmod{2^m}$.

J. M. Gandhi, Western Illinois University, USA

Lösung: Buchstabenvariabeln bedeuten natürliche Zahlen, und alle Kongruenzen sind modulo 2^m zu verstehen. Bekanntlich ist $t^{2^{m-2}} \equiv 1$, wenn t ungerade und $m \geqslant 3$. Von jetzt an setzen wir $m \geqslant 4$ voraus. Dann gilt $2^{m-2} \geqslant m$ und somit

$$t^{2^{m-2}} \equiv 0 \text{ oder } t^{2^{m-2}} \equiv 1, \text{ je nachdem } t \text{ gerade oder ungerade.} \tag{1}$$

Wir nehmen jetzt an, dass $(x, y) = (y, z) = (z, x) = 1$ und

$$x^{2^{m-2}} + y^{2^{m-2}} = p\, z^{2^{m-2}}. \tag{2}$$

Fall 1: z ist gerade. Dann ergibt sich aus (1) und (2) die Kongruenz

$$x^{2^{m-2}} + y^{2^{m-2}} \equiv 0\,,$$

was wegen (1) offenbar unmöglich ist.

Fall 2: z ist ungerade. Wir können dann z' so finden, dass $z\, z' \equiv 1$ ist. Wir setzen $u = x\, z'$, $v = y\, z'$, und aus (2) folgt

$$u^{2^{m-2}} + v^{2^{m-2}} \equiv p\,,$$

wobei u und v nicht beide gerade sind. Nach (1) ist dies nur dann möglich, wenn entweder $p \equiv 1$ oder $p \equiv 2$ gilt. Damit ist der Beweis beendet.

A. Bager, Hjørring, Dänemark

Weitere Lösungen sandten P. Bundschuh (Freiburg i. Br.), J. Fehér (Pécs, Ungarn), E. Teuffel (Korntal/Stuttgart) und E. Vegh (Washington, D.C., USA).

Aufgabe 617. Démontrer que pour tout nombre naturel m il existe au moins un nombre triangulaire qui est, de m façons au moins, une somme de deux nombres triangulaires.

W. Sierpiński †, Varsovie

Lösung: Ist $n = a^2 + (a+1)^2$ eine Summe zweier aufeinanderfolgender Quadratzahlen und setzt man $n' = 1 + 4\,a^2$, so ist, wie man leicht nachrechnet, $n\, n' = (2\,a^2 + a)^2 + (2\,a^2 + a + 1)^2$, also $n\, n'$ ebenfalls eine Summe von zwei aufeinanderfolgenden Quadratzahlen. Wählen wir deshalb eine beliebige natürliche Zahl a_1 und setzen $n_1 = a_1^2 + (a_1 + 1)^2$, $a_{k+1} = 2\,a_k^2 + a_k$ und $n_{k+1} = 1 + 4\,a_k^2$ $(k = 1, 2, \ldots)$, so wird offenbar $N_k = n_1 \cdot \ldots \cdot n_k = a_k^2 + (a_k + 1)^2$ $(k = 1, 2, \ldots)$. N_k enthält als ungerade Summe zweier teilerfremden Quadrate nur Primzahlen $\equiv 1 \pmod 4$. Deshalb ist nach einem Satz von Jacobi (vgl. etwa P. Bachmann, Niedere Zahlentheorie, Band II, Teubner Leipzig 1910, p. 308ff.) die Anzahl der Darstellungen von $2\,N_k$ in der Form $X^2 + Y^2$ $(X, Y$ natürliche Zahlen) gleich der Anzahl der Teiler von N_k. Da N_k als Produkt von k Faktoren > 1 mindestens $k + 1$ Teiler hat, gibt es also mindestens $k + 1$ (bis auf die Reihenfolge der X, Y verschiedene) Darstellungen $2\,N_k = X^2 + Y^2$, und weil $N_k \equiv 1 \pmod 4$ ist, müssen X und Y ungerade sein. Die mindestens $k + 1$ Darstellungen $2\,[a_k^2 + (a_k + 1)^2] = (2\,x + 1)^2 + (2\,y + 1)^2$ sind aber äquivalent mit mindestens $k + 1$ Darstellungen $\Delta_{a_k} = \Delta_x + \Delta_y$ $(x \geqslant 0,\ y \geqslant 0$ ganz), wobei $\Delta_j = j\,(j + 1)/2$ gesetzt sei. Da k beliebig gross gewählt werden kann, lässt sich aus dem vorigen die Behauptung entnehmen.

E. Teuffel, Korntal/Stuttgart

Weitere Lösungen sandten A. Bager (Hjørring, Dänemark), C. Bindschedler (Küsnacht/Zürich), P. Bundschuh (Freiburg i. Br.), L. Carlitz (Durham, N.C., USA) und J. Fehér (Pécs, Ungarn).

Anmerkung der Redaktion: Eine Verschärfung der Aussage von Aufgabe 617 hat P. Bundschuh gefunden. Vgl. seine Note «Zwei Resultate über Trigonalzahlen», dieses Heft S. 12.

Neue Aufgaben

Die Lösungen sind getrennt nach den einzelnen Aufgaben erbeten bis **10. September 1971**, wenn möglich in Maschinenschrift.

Aufgabe 638. Let p be a fixed prime and a, b, s nonnegative integers such that $a + b < p^s$. Show that the binomial coefficients

$$\binom{p^s - a - 1}{b}, \quad \binom{p^s - b - 1}{a}$$

are divisible by exactly the same power of p. L. Carlitz, Duke University, USA

Aufgabe 639. Es seien 0_i die Mittelpunkte von vier Kreisen k_i $(i = 1, 2, 3, 4)$, die einander in einem Punkte P schneiden. Es seien weiter die sechs übrigen verschiedenen Schnittpunkte der Kreise k_i mit A_{ij} bezeichnet (A_{ij} der Schnittpunkt der Kreise k_i, k_j). Es ist je eine die Mittelpunkte 0_i betreffende notwendige und hinreichende Bedingung dafür zu finden, dass

a) die Punkte A_{ij} die Eckpunkte eines vollständigen Vierseits mit den Seiten a_i sind,

b) die Seiten a_i des Vierseits ein Sehnenviereck bilden. J. Brejcha, Brno, CSSR

Aufgabe 640. Am ebenen Dreieck mit Seiten $a \leqslant b \leqslant c$ $(a + b + c = 2\,s)$, Inradius r und Umradius R zeige man

$$4\,R\,r - r^2 \gtreqless \left(\frac{s}{2}\right)^2 \text{ ist äquivalent mit } b + c \lesseqgtr 3\,a\,, \tag{1}$$

$$2\,R\,r - r^2 \gtreqless \left(\frac{s}{3}\right)^2 \text{ ist äquivalent mit } c + a \gtreqless 2\,b\,. \tag{2}$$

I. Paasche, München

Aufgabe 641. Gesucht wird ein Beweis der folgenden einfachen Aussage kombinatorisch-geometrischer Art: Es seien n und i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ natürliche Zahlen, und K bezeichne eine Menge von n abgeschlossenen, nicht notwendig disjunkten Strecken einer Geraden G. Die Menge derjenigen Punkte von G, die wenigstens i verschiedenen Strecken von K angehören, zerfällt in endlich viele paarweise disjunkte und abgeschlossene Strecken; ihre Anzahl sei k_i $(1 \leqslant k_i \leqslant n)$. Es gilt dann die additive Formel $n = \sum_{i=1}^{n} k_i$.

H. Hadwiger, Bern

Nachruf

Paul Finsler †

Am 29. April 1970 hat die mathematische Welt einen bedeutenden Forscher und grossen Lehrer verloren. Paul Finsler wurde am 1. April 1894 in Heilbronn geboren und entstammte einer alten Zürcher Familie. Zu seinen Vorfahren gehört Joh. Caspar Lavater.

Grosse Berühmtheit in der mathematischen Fachwelt erlangte Finsler mit seiner Dissertation über Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen im Jahre 1918, die er unter der Leitung von Carathéodory in Göttingen schrieb. Wegen ihrer Bedeutung – es ist seither eine grosse Literatur über Finslersche Räume entstanden – ist die Arbeit 1951 von Birkhäuser in Basel als unveränderter Neudruck herausgegeben worden. Von Göttingen kam P. Finsler 1922 als Privatdozent nach Köln, und 1927 wurde er ausserordentlicher Professor an der Universität seiner Heimatstadt Zürich. Von 1944 bis zu seiner Pensionierung im Jahre 1959 war er Ordinarius für Mathematik in Zürich. Während seiner letzten Jahre hat Professor Finsler rege am mathematisch-philosophischen Seminar der Universität Zürich teilgenommen. Seine letzten mathematischen Ideen zur Graphentheorie erwiesen sich als äusserst anregend, wie zahlreiche zurzeit in Entstehung begriffene Untersuchungen zeigen. Zu den hauptsächlichsten mathematischen Interessen Finslers gehörten Geometrie, Grundlegung der Mathematik, elementare Zahlentheorie und Wahrscheinlichkeitsrechnung. Zu allen diesen Gebieten erschienen regelmässig seine Publikationen.

Finsler verfügte in gleichem Masse über grosse logische Schärfe, rechnerische Fähigkeit und einen feinen Humor. Es war ein Erlebnis, als Mathematikstudent bei ihm Vorlesungen zu hören. Sein Stil erinnert an die tiefen und witzigen Ausführungen Freges. Das wertvollste, das Finsler vielen seiner Schüler mitgegeben hat, ist ein grosses