**Zeitschrift:** Elemente der Mathematik
**Herausgeber:** Schweizerische Mathematische Gesellschaft
**Band:** 26 (1971)
**Heft:** 2

**Artikel:** Zum axiomatischen Aufbau der Mechanik
**Autor:** Ziegler, Hans
**DOI:** https://doi.org/10.5169/seals-28063

**Nutzungsbedingungen**
Die ETH-Bibliothek ist die Anbieterin der digitalisierten Zeitschriften auf E-Periodica. Sie besitzt keine Urheberrechte an den Zeitschriften und ist nicht verantwortlich für deren Inhalte. Die Rechte liegen in der Regel bei den Herausgebern beziehungsweise den externen Rechteinhabern. Das Veröffentlichen von Bildern in Print- und Online-Publikationen sowie auf Social Media-Kanälen oder Webseiten ist nur mit vorheriger Genehmigung der Rechteinhaber erlaubt. Mehr erfahren

**Conditions d'utilisation**
L'ETH Library est le fournisseur des revues numérisées. Elle ne détient aucun droit d'auteur sur les revues et n'est pas responsable de leur contenu. En règle générale, les droits sont détenus par les éditeurs ou les détenteurs de droits externes. La reproduction d'images dans des publications imprimées ou en ligne ainsi que sur des canaux de médias sociaux ou des sites web n'est autorisée qu'avec l'accord préalable des détenteurs des droits. En savoir plus

**Terms of use**
The ETH Library is the provider of the digitised journals. It does not own any copyrights to the journals and is not responsible for their content. The rights usually lie with the publishers or the external rights holders. Publishing images in print and online publications, as well as on social media channels or websites, is only permitted with the prior consent of the rights holders. Find out more

**Download PDF:** 02.07.2025

**ETH-Bibliothek Zürich, E-Periodica, https://www.e-periodica.ch**

ELEMENTE DER MATHEMATIK

Revue de mathématiques élémentaires – Rivista di matematica elementare

*Zeitschrift zur Pflege der Mathematik*
*und zur Förderung des mathematisch-physikalischen Unterrichts*

Publiziert mit Unterstützung des Schweizerischen Nationalfonds
zur Förderung der wissenschaftlichen Forschung

El. Math. Band 26 Heft 2 Seiten 25-48 10. März 1971

# Zum axiomatischen Aufbau der Mechanik

*1. Einleitung.* Die meisten Lehrbücher der klassischen Mechanik schreiten von der Statik zur Dynamik (Kinematik und Kinetik) und vom Massenpunkt über den starren zum deformierbaren Körper fort. Das hat den Vorzug, dass man von einfachen zu komplizierteren Situationen aufsteigt. Axiomatisch schafft aber dieses Vorgehen insofern ein beträchtliches Durcheinander, als manches Axiom eingeführt werden muss, das sich später als Spezialfall eines allgemeineren Prinzips herausstellt. Zudem ist der Schritt vom Massenpunkt zum Kontinuum unter dem Bild des Punkthaufens unbefriedigend und mit Recht von zahlreichen Autoren beanstandet worden.

Diese Nachteile lassen sich dadurch vermeiden, dass man die Mechanik vom Impuls- und Drallsatz für das Kontinuum her entwickelt, wobei sich einerseits die Statik und andererseits der starre Körper sowie der Massenpunkt als Sonderfälle ergeben. Es erscheint aber als fraglich, ob dieses Vorgehen didaktisch befriedigt, und der Verfasser hat daher bei der Überarbeitung seines Lehrbuches[1]) nach einem anderen Weg gesucht, der hier in seinen Hauptzügen beschrieben werden soll:

Es wird mit der Kinematik begonnen, die sich aus geometrischen Vorstellungen herleiten lässt und zunächst für Massenpunkte, starre Körper und Systeme von solchen entwickelt wird. Nach Einführung des Kraftbegriffs kann sodann die Leistung definiert werden, und damit besteht die Möglichkeit, die Statik starrer Körper und Systeme aus dem *Prinzip der virtuellen Leistungen* und einem verallgemeinerten *Reaktionsprinzip* aufzubauen. Der Übergang zum deformierbaren Körper (Festigkeitslehre) lässt sich ohne weiteres vollziehen, und mit der Erweiterung des Prinzips der virtuellen Leistungen durch Hinzunahme der Trägheitskräfte ist auch das Fundament für die Kinetik gelegt.

Im Vergleich zum üblichen Vorgehen weist das hier vorgeschlagene den Vorzug einer erheblichen Straffung auf, ohne indessen auf die Vorteile des Aufstiegs vom Einfachen zum Komplizierteren zu verzichten. Freilich wird dabei anlässlich der Einführung der Grundbegriffe auf axiomatische Feinheiten verzichtet, und zudem wird den erstrebten Vorteilen die auf diesem Gebiet so persistente historische Chronologie geopfert. Ob sich das Verfahren didaktisch bewähren wird, bleibt abzuwarten; die bisherigen Erfahrungen sind durchaus ermutigend.

Es ist klar, dass mit diesem Vorgehen in der Sache nichts grundsätzlich Neues erhalten wird. Ich glaube aber, dass sich so der eine oder andere Begriff schärfer als

[1]) Vorlesungen über Mechanik, Birkhäuser, Basel und Stuttgart 1970.

üblich fassen lässt und dass sich vor allem gewisse Fragen abklären, die gelegentlich nicht nur dem Anfänger Schwierigkeiten bereiten.

*2. Kinematik.* In einem gegebenen Bezugssystem ist die *Lage* eines beliebigen Körpers durch die Fahrstrahlen $\boldsymbol{r}$ aller ihm angehörenden Punkte bestimmt. Unter seinem *Bewegungszustand* zur Zeit $t$ kann man die Gesamtheit aller Geschwindigkeitsvektoren $\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}}$ verstehen, und die *Bewegung* wird schliesslich durch Angabe der Fahrstrahlen als Funktionen $\boldsymbol{r}(t)$ der Zeit beschrieben.

Im Falle des Massenpunktes genügt zur Angabe von Lage und Bewegungszustand ein einziger Fahrstrahl samt seiner zeitlichen Ableitung, und im Falle des starren Körpers wird der Bewegungszustand durch die *Kinemate* $\boldsymbol{v}_0$, $\boldsymbol{\omega}$ im Ausgangspunkt $O$ der Fahrstrahlen $\boldsymbol{r}$ bestimmt. Aus ihr ergeben sich die Geschwindigkeiten der einzelnen Punkte zu

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}\,, \tag{2.1}$$

und zwar stellt (2.1) das allgemeinste Geschwindigkeitsfeld dar, welches der Bedingung der Starrheit

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)^2 = 2\,(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)\,(\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1) = 0 \tag{2.2}$$

und damit dem Satz über die projizierten Geschwindigkeiten genügt.

Unter einem *zulässigen* soll ein solcher Bewegungszustand verstanden werden, der allen Bindungen des betrachteten Körpers genügt, unter einem *virtuellen* Bewegungszustand ein fiktiver, der vom wirklichen Bewegungszustand des Körpers unabhängig ist. So beschreibt z. B. (2.1) den allgemeinsten (wirklichen oder virtuellen) Bewegungszustand des freien starren und gleichzeitig einen speziellen Bewegungszustand des freien deformierbaren Körpers.

Schliesslich wird die Leistung $L$ einer Kraft $\boldsymbol{K}$ als Skalarprodukt

$$L = \boldsymbol{K}\boldsymbol{v} \tag{2.3}$$

aus dem Kraftvektor mit der Geschwindigkeit $\boldsymbol{v}$ des Angriffspunktes definiert, die Leistung einer Kräftegruppe als Summe der Leistungen der Einzelkräfte.

*3. Prinzipien.* Man kann die Mechanik im wesentlichen aus zwei Axiomen entwickeln. Als erstes sei das *Prinzip der virtuellen Leistungen* in der folgenden Gestalt formuliert:

1. Zwei Kräftegruppen sind an einem gegebenen Körper *äquivalent,* wenn ihre virtuelle Leistung unter allen zulässigen virtuellen Bewegungszuständen dieselbe ist.

2. Insbesondere ist eine Kräftegruppe an einem gegebenen Körper *im Gleichgewicht,* wenn sie äquivalent null ist, d.h. wenn ihre virtuelle Leistung für jeden zulässigen virtuellen Bewegungszustand verschwindet.

3. Am *ruhenden* Körper ist die Gesamtheit aller Kräfte im Gleichgewicht.

Die ersten beiden Aussagen definieren die Äquivalenz und das Gleichgewicht von Kräftegruppen, und zwar in Abweichung vom üblichen Vorgehen unter Bezug auf den Körper, an dem sie angreifen. Das drängt sich deshalb auf, weil ein gegebener virtueller Bewegungszustand für einen bestimmten Körper zulässig sein mag, für einen anderen aber nicht. So sind zum Beispiel für den starren Körper nur Bewegungszustände der Form (2.1) zulässig.

Die erste Aussage des Prinzips liefert im Verein mit dem Satz von den projizierten Geschwindigkeiten für den starren Körper die Verschiebbarkeit einer Kraft längs ihrer Wirkungslinie, und aus der zweiten folgt – ebenfalls für den starren Körper – das Gleichgewicht zweier entgegengesetzt gleicher Kräfte mit gemeinsamer Wirkungslinie. Dass am deformierbaren Körper die Kraft nach der ersten Aussage nicht verschiebbar ist, entspricht den üblichen Vorstellungen. Dass hier zwei entgegengesetzt gleiche Kräfte mit gemeinsamer Wirkungslinie nicht im Gleichgewicht sind, mag ungewohnt klingen, folgt aber aus der in der zweiten Aussage enthaltenen Definition des Gleichgewichts und ist im Einklang mit der Tatsache, dass zwei solche Kräfte den Körper deformieren. Man kann übrigens den Anschluss an die übliche Ausdrucksweise mit der Präzisierung herstellen, dass zwei solche Kräfte den Gleichgewichtsbedingungen des starren Körpers genügen, d. h. unter starren Bewegungszuständen die virtuelle Gesamtleistung null ergeben.

Die dritte Aussage des Prinzips der virtuellen Leistungen bildet die Grundlage der Behandlung ruhender Körper. Insofern ist sie speziell und bedarf für die Behandlung bewegter Körper der Ergänzung. Sie gilt aber nicht in jedem Bezugssystem und dient damit insbesondere zur Definition der Inertialsysteme.

Als zweites fundamentales Axiom der Mechanik kann das *Reaktionsprinzip* in der folgenden Gestalt formuliert werden:

1. Übt ein Körper an einem zweiten Kräfte aus (Actio), dann auch der zweite am ersten (Reactio).

2. Actio and Reactio genügen zusammen den Gleichgewichtsbedingungen des starren Körpers, d. h. ihre virtuelle Gesamtleistung unter starren Bewegungszuständen des beide Körper umfassenden Systems ist null.

Die hier gegebene Formulierung unterscheidet sich von der üblichen durch grössere Allgemeinheit. Für Einzelkräfte (zwischen Massenpunkten) reduziert sich das Prinzip auf die übliche Gestalt; in der allgemeineren Form gilt es aber beispielsweise auch für Kräftepaare oder für kontinuierliche Kräfteverteilungen.

*4. Statik.* Aus den beiden ersten Aussagen des Prinzips der virtuellen Leistungen kann man zunächst zwei allgemeine Sätze herleiten. Ist von zwei Kräftegruppen jede mit derselben dritten im Gleichgewicht, dann gilt für beliebige zulässige virtuelle Bewegungszustände $L_1 + L_3 = 0$ sowie $L_2 + L_3 = 0$ und daher $L_1 = L_2$; die beiden Kräftegruppen sind also äquivalent. Ebenso einfach zeigt man, dass zwei äquivalente Kräftegruppen äquivalent bleiben, wenn man der einen beliebige Kräfte wegnimmt und sie der anderen mit umgekehrter Richtung zufügt.

Sodann folgt ohne weiteres das Parallelogrammprinzip für Kräfte mit gemeinsamem Angriffspunkt. Mit ihm und den bereits in Abschnitt 3 für starre Körper als gültig erkannten Sätzen von der Verschiebbarkeit einer Kraft längs ihrer Wirkungslinie und vom Gleichgewicht zweier entgegengesetzt gleicher kollinearer Kräfte verfügt man über die Grundlagen, aus denen man, mit der Reduktion und dem Gleichgewicht von zwei und drei Kräften beginnend, die Statik des starren Körpers zu entwickeln pflegt. Man kann aber die Resultate, die sich auf diese Weise eines aus dem anderen ergeben, auch direkt – und meist mit weniger Mühe – aus dem Prinzip der virtuellen Leistungen gewinnen.

Sind zum Beispiel $\boldsymbol{K}$ und $-\boldsymbol{K}$ die beiden Kräfte eines Paares, deren Angriffspunkte von $O$ aus die Fahrstrahlen $\boldsymbol{r}_2$ bzw. $\boldsymbol{r}_1$ haben, so ist ihre virtuelle Gesamtleistung unter dem Bewegungszustand (2.1)

$$L = \boldsymbol{K}\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{K}\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{K}\,[\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)] = (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{K})\,\boldsymbol{\omega}\,, \tag{4.1}$$

wenn $\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{r}$ gesetzt wird. Damit ist aber nachgewiesen, dass das Kräftepaar am starren Körper durch sein Moment

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{K} \tag{4.2}$$

völlig bestimmt und dass seine Leistung durch

$$L = \boldsymbol{M}\,\boldsymbol{\omega} \tag{4.3}$$

gegeben ist. Von hier aus zeigt man ebenso einfach, dass am freien starren Körper ein Kräftepaar sich weder auf eine Einzelkraft reduzieren lässt noch mit einer solchen im Gleichgewicht ist.

Ist schliesslich $\boldsymbol{K}_1, \boldsymbol{K}_2, \ldots, \boldsymbol{K}_n$ eine beliebige Kräftegruppe, und sind $\boldsymbol{r}_1, \boldsymbol{r}_2, \ldots, \boldsymbol{r}_n$ die auf $O$ bezogenen Fahrstrahlen ihrer Angriffspunkte, so ist die Gesamtleistung unter dem Bewegungszustand (2.1) durch

$$L = \sum_1^n \boldsymbol{K}_i\,\boldsymbol{v}_i = \sum_1^n \boldsymbol{K}_i\,\boldsymbol{v}_0 + \sum_1^n \boldsymbol{K}_i\,(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}_i) \tag{4.4}$$

gegeben. Man kann hiefür auch

$$L = \left(\sum_1^n \boldsymbol{K}_i\right) \boldsymbol{v}_0 + \left(\sum_1^n \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{K}_i\right) \boldsymbol{\omega} \tag{4.5}$$

schreiben und hat damit nachgewiesen, dass sich die Kräftegruppe am starren Körper auf eine *Dyname* $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{M}_0$ mit der Einzelkraft

$$\boldsymbol{R} = \sum_1^n \boldsymbol{K}_i \tag{4.6}$$

und einem Kräftepaar mit dem Moment

$$\boldsymbol{M}_0 = \sum_1^n \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{K}_i \tag{4.7}$$

reduzieren lässt.

*5. Ruhende Körper.* Für die Anwendung der beiden in Abschnitt 3 formulierten Grundprinzipien sowie der aus ihnen gewonnenen Sätze muss zwischen verschiedenen Arten von Kräften unterschieden werden. Dabei wird ein erstes Kriterium durch das Reaktionsprinzip geliefert, ein zweites durch die Bestimmungsstücke der Kraft.

Eine Kraft soll für einen gegebenen Körper, an dem sie angreift, eine *innere* oder *äussere Kraft* heissen, je nachdem ihre Reaktion am Körper selbst oder ausserhalb desselben angreift. Im Hinblick auf diese Unterscheidung ist es nötig, den zu behandelnden Körper genau abzugrenzen.

Ferner soll eine Kraft, die – etwa als Funktion der Lage des Körpers, an dem sie angreift (und bei bewegtem Körper allenfalls auch im Abhängigkeit seines Bewegungszustandes und der Zeit) – im vornherein gegeben ist, als *Last* (eingeprägte

Kraft) bezeichnet werden. Unter einer *Lagerkraft* (Reaktion) soll umgekehrt eine Kraft verstanden werden, welche *a priori* höchstens teilweise bekannt ist und erst mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen (bzw. der Bewegungsgleichungen) völlig bestimmt wird.

In der Statik geht es meist darum, von den an einem ruhenden Körper angreifenden Lasten auf die äusseren Lagerkräfte (und allenfalls auf die Ruhelage des Körpers) zu schliessen. Falls er nicht frei ist, kann man ihn zu diesem Zweck *befreien*, d. h. unter Einführung aller äusseren Lagerkräfte aus seinem Verband herauslösen und ihn alsdann als starren Körper bewegen. Nach der dritten Aussage des Prinzips der virtuellen Leistungen sind am befreiten Körper alle inneren und äusseren Kräfte im Gleichgewicht. Nach dem Reaktionsprinzip sind aber am *starren* Körper die inneren Kräfte für sich im Gleichgewicht, mithin auch die äusseren. Damit ist das *Erstarrungsprinzip* bewiesen, wonach am ruhenden Körper die äusseren Kräfte $\boldsymbol{A}_i$ für sich den Gleichgewichtsbedingungen des starren Körpers, nach (4.6) und (4.7) also den Forderungen

$$\sum_1^n \boldsymbol{A}_i = 0\,, \qquad \sum_1^n \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{A}_i = 0 \tag{5.1}$$

genügen.

Das Erstarrungsprinzip reicht zuweilen nicht aus, um alle äusseren Kräfte zu bestimmen. In solchen Fällen, aber auch dann, wenn man sich auch für die inneren Kräfte interessiert, macht man von der Möglichkeit Gebrauch, den betrachteten Körper beliebig zu unterteilen und das Erstarrungsprinzip auf die einzelnen Teile anzuwenden.

Man kann sich aber umgekehrt bei der Formulierung des Prinzips der virtuellen Leistungen auf Bewegungszustände beschränken, welche *ohne Befreiung* des Körpers zulässig sind. Das empfiehlt sich dann, wenn die Lagerkräfte (etwa weil sie reibungsfrei sind) erstens unter solchen Bewegungszuständen keine Arbeit leisten und zweitens nicht interessieren. Sie treten dann nämlich nicht als Unbekannte auf, und die Zahl der Gleichgewichtsbedingungen reduziert sich entsprechend. Bei diesem Vorgehen ist auf zweierlei zu achten:

Erstens bedient man sich bei der Formulierung des Prinzips der virtuellen Leistungen zwar fiktiver Bewegungszustände; die Kräfte müssen aber, sofern sie von der Bewegung abhängen, mit ihren wirklichen Werten und nicht mit denjenigen eingesetzt werden, welche sie bei der virtuellen Bewegung hätten.

Zweitens hat die in der zweiten Aussage des Prinzips enthaltene Definition des Gleichgewichts auch hier ihre Konsequenzen für die Formulierung. Es sei zum Beispiel ein beliebig belastetes und an zwei Stellen verschieblich gelagertes ruhendes Fachwerk gegeben. Am äusserlich befreiten Fachwerk ist die Gesamtleistung der Lasten und äusseren Lagerkräfte null; diese Kräfte sind also am starren, befreiten Fachwerk zusammen im Gleichgewicht. Andererseits ist die Leistung der Lasten allein schon null, falls das Fachwerk in seinen reibungsfreien Lagern verschoben wird; für das nichtbefreite Fachwerk sind also bereits die Lasten im Gleichgewicht.

*6. Diskussion der inneren Kräfte.* Die Einteilung der Kräfte in äussere und innere wird durch die Abgrenzung des Körpers bestimmt. Trotzdem ist bei der Einführung der inneren Kräfte eine gewisse Vorsicht am Platz.

So greifen zum Beispiel am idealen Fachwerk die äusseren Kräfte an den Knoten an und sind hier im Falle der Ruhe mit den von den Stäben herrührenden Knotenkräften im Gleichgewicht. Man kann die Stäbe als blosse Übertragungsorgane für die Knotenkräfte auffassen und sich auch wegdenken, sofern man sie durch die Knotenkräfte ersetzt. In diesem Sinne sind die Knotenkräfte (und nicht die Stabkräfte) die für das ganze Fachwerk inneren Kräfte. In der Tat ist wegen des Gleichgewichts an allen Knoten bei einer (mit der Wegnahme der Stäbe zulässig gewordenen) Deformation des Fachwerks die virtuelle Gesamtleistung der äusseren und der Knotenkräfte null.

Man kann aber das Fachwerk auch als Gesamtheit von Knoten und (diesmal nicht entfernten, aber zweckmässig als dehnbar angenommenen) Stäben betrachten. Für den einzelnen Stab sind dann die an seinen Enden angreifenden Stabkräfte die äusseren Kräfte, und für die inneren ergibt sich eine ähnliche Situation wie oben am ganzen Fachwerk: Zerlegt man den Stab durch achsennormale Schnitte in Elemente, so sind in den Trennflächen die Normalkräfte anzubringen. Nun sind aber (weil die Elemente deformierbar sind, aber auch deshalb, weil die Endkräfte im Ausdruck für die virtuelle Leistung nicht gleichzeitig als äussere *und* innere Kräfte vorkommen dürfen) nicht die an den einzelnen Elementen angreifenden Normalkräfte mit den beiden Stabkräften im Gleichgewicht, sondern ihre Reaktionen, d.h. die negativen Normalkräfte, von denen man sich vorstellen mag, dass sie an den materiellen Trennflächen zwischen je zwei Elementen angreifen. Die Elemente erscheinen so (wie oben die ganzen Stäbe) nur als Übertragungsorgane für die (den Knotenkräften entsprechenden) negativen Normalkräfte, und wegen des Gleichgewichts an jeder Trennstelle einschliesslich der Stabenden ist in der Tat die virtuelle Gesamtleistung der Stab- und der negativen Normalkräfte bei jeder Längenänderung des Stabes null. Zum ganzen Fachwerk zurückkehrend stellt man schliesslich fest, dass für dieses die Knoten-, die Stab- und die *negativen* Normalkräfte zusammen die inneren Kräfte darstellen.

Von hier aus ist der Schritt zum Kontinuum leicht zu vollziehen. Hier sind (in tensorieller Schreibweise) die äusseren Kräfte die (mit dem Spannungstensor $\sigma_{ij}$ und dem vektoriellen Oberflächenelement $\nu_j\, dA$ gebildeten) Oberflächenkräfte und die (mit der spezifischen Massenkraft $k_i$ und dem Massenelement $dm = \varrho\, dV$ gebildeten) Raumkräfte $\varrho\, k_i\, dV$. Die inneren Kräfte werden nicht durch die an den Raumelementen angreifenden Spannungen dargestellt, sondern durch ihre Reaktionen, d.h. die *negativen Spannungen*, von denen man sich wieder vorstellen kann, dass sie am Flächengitter angreifen, welches die Elemente voneinander trennt. Damit erklärt sich der unter dem (virtuellen) Geschwindigkeitsfeld $v_i$ (mit der Verformungsgeschwindigkeit $d_{ij}$) gültige Ausdruck

$$L = \int \sigma_{ij}\, v_i\, \nu_j\, dA + \int \varrho\, k_i\, v_i\, dV - \int \sigma_{ij}\, d_{ij}\, dV \tag{6.1}$$

für die Gesamtleistung, in dem das dritte Integral *unter Einschluss des negativen Vorzeichens* die Leistung der inneren Kräfte darstellt.

7. *Kinetik.* Der Übergang zum bewegten Körper wird durch Hinzunahme der mit den wirklichen Beschleunigungen $\boldsymbol{a} = \ddot{\boldsymbol{r}}$ gebildeten Trägheitskräfte

$$d\boldsymbol{T} = -\ddot{\boldsymbol{r}}\, dm = -\varrho\, \ddot{\boldsymbol{r}}\, dV \tag{7.1}$$

vollzogen, d.h. dadurch, dass man die dritte Aussage des Prinzips der virtuellen Leistungen durch die folgende ersetzt bzw. ergänzt:

4. Am *bewegten* Körper ist die Gesamtheit aller wirklichen und aller Trägheitskräfte jederzeit im Gleichgewicht.

Die bekannten Bewegungssätze werden jetzt dadurch erhalten, dass man die wirkliche Bewegung zu einer beliebigen Zeit durch einen zulässigen virtuellen Bewegungszustand ersetzt und die virtuelle Gesamtleistung der wirklichen und der Trägheitskräfte nullsetzt.

Denkt man sich dabei die äusseren Bindungen entfernt, so kann der virtuelle als starrer Bewegungszustand angesetzt werden. Nach dem Reaktionsprinzip ist dann die virtuelle Leistung der inneren Kräfte null, und die Gesamtleistung der äusseren und der Trägheitskräfte stellt sich nach (2.1) in der Form

$$L = \left(\sum_1^n \boldsymbol{A}_i - \int \ddot{\boldsymbol{r}}\, dm\right) \boldsymbol{v}_0 + \left(\sum_1^n \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{A}_i - \int \boldsymbol{r} \times \ddot{\boldsymbol{r}}\, dm\right) \boldsymbol{\omega} = 0 \tag{7.2}$$

dar, wobei $\boldsymbol{v}_0$ und $\boldsymbol{\omega}$ die Bestimmungsstücke des virtuellen Bewegungszustandes sind. Da (7.2) für beliebige $\boldsymbol{v}_0$ und $\boldsymbol{\omega}$ erfüllt sein muss und sich die Integrale als zeitliche Ableitungen von Impuls

$$\boldsymbol{B} = \int \dot{\boldsymbol{r}}\, dm \tag{7.3}$$

und Drall

$$\boldsymbol{D}_0 = \int \boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}}\, dm \tag{7.4}$$

bezüglich $O$ interpretieren lassen, erhält man mit

$$\dot{\boldsymbol{B}} = \sum_1^n \boldsymbol{A}_i \quad \text{und} \quad \dot{\boldsymbol{D}}_0 = \sum_1^n \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{A}_i \tag{7.5}$$

den *Impuls-* und den *Drallsatz* für den betrachteten Körper. Die rechten Seiten enthalten nur die für den ganzen Körper *äusseren* Kräfte (einschliesslich aller äusseren Lagerkräfte, die ja bei der Befreiung eingeführt werden müssen). Im Falle des Massenpunktes geht der Impulssatz in das *Newtonsche Bewegungsgesetz* über.

Man kann sich bei der Formulierung des Prinzips der virtuellen Leistungen auch auf diejenigen Bewegungszustände beschränken, welche ohne Befreiung zulässig sind. Auf diese Weise gewinnt man die *Lagrangeschen Gleichungen*. Identifiziert man den virtuellen Bewegungszustand insbesondere mit dem zur Zeit $t$ wirklich vorhandenen, so kommt

$$\sum_1^n \boldsymbol{K}_i \dot{\boldsymbol{r}}_i - \int \dot{\boldsymbol{r}}\, \ddot{\boldsymbol{r}}\, dm = 0\,, \tag{7.6}$$

wobei jetzt die $\boldsymbol{K}_i$ die äusseren und inneren Kräfte verkörpern, soweit diese bei der wirklichen Bewegung Arbeit leisten. Da sich das Integral als zeitliche Ableitung der Bewegungsenergie

$$T = \frac{1}{2} \int \dot{\boldsymbol{r}}^2\, dm \tag{7.7}$$

interpretieren lässt, geht (7.6) schliesslich in den *Energiesatz*

$$\dot{T} = L \tag{7.8}$$

über, in dem $L$ die wirkliche Leistung aller *äusseren und inneren* Kräfte darstellt.

Alle diese Beziehungen gelten in Inertialsystemen. Ihre Übertragung auf andere Bezugssysteme erfolgt in der bekannten Weise durch Hinzunahme der Zusatzkräfte der Relativbewegung.

*8. Schlussbemerkungen.* Aus den letzten Abschnitten ergibt sich, dass es tatsächlich möglich ist, die klassische Mechanik aus zwei Grundprinzipien, nämlich dem Prinzip der virtuellen Leistungen und dem Reaktionsprinzip, zu entwickeln. Neu ist dabei nur die Art, wie diese Prinzipien formuliert werden, und ungewohnt vor allem die in Abschnitt 3 gegebene Fassung des Äquivalenzbegriffs.

Üblicherweise werden zwei Kräftegruppen als äquivalent bezeichnet, wenn die über sie erstreckten Summen (4.6) und (4.7) verschwinden, und zwar auch dann, wenn sich der betrachtete Körper unter den beiden Kräftegruppen verschieden verhält. Hier wird dagegen das Verhalten des Körpers in den Vordergrund gestellt und zum Kriterium für die Äquivalenz gemacht.

Auch nach der landläufigen Form des Prinzips ist die virtuelle Gesamtleistung aller an einem beliebigen Körper angreifenden wirklichen und Trägheitskräfte in jedem Augenblick null. Es ist aber offenbar sinnvoll, zwei Kräftegruppen, unter denen sich ein bestimmter Körper *ceteris paribus* gleich bewegt, als äquivalent zu bezeichnen. Dazu genügt das Verschwinden der Summen (4.6) und (4.7) keineswegs; vielmehr müssen die virtuellen Leistungen jeder der beiden Kräftegruppen zusammen mit derjenigen der gleichen Trägheitskräfte unter jedem zulässigen Bewegungszustand null ergeben, und das trifft dann und nur dann zu, wenn die virtuellen Leistungen der beiden Kräftegruppen unter beliebigen zulässigen Bewegungszuständen gleich sind. Genau das ist aber die in der ersten Aussage von Abschnitt 3 enthaltene Definition der Äquivalenz, aus der sich zwangsläufig auch diejenige des Gleichgewichts ergibt.

HANS ZIEGLER, ETH Zürich

# Die projektiven Abbildungen auf einer Geraden

Die Menge aller eindimensionalen Unterräume eines $(n+1)$-dimensionalen Vektorraumes $\mathfrak{V}$ heisst $n$-dimensionaler projektiver Raum, seine Elemente heissen Punkte[1]). Insbesondere bilden die eindimensionalen Unterräume eines zweidimensionalen Vektorraumes eine projektive Gerade. Eine lineare Abbildung des Vektorraumes $\mathfrak{V}$ auf sich induziert eine projektive Abbildung des von $\mathfrak{V}$ erzeugten projektiven Raumes auf sich. Diese projektiven Abbildungen bilden selbst wieder einen projektiven Raum, und zwar der Dimension $n\,(n+2)$.

Es ist reizvoll, diesen Raum für den Fall $n = 1$, d.h. den Raum $\mathfrak{P}$ der Projektivitäten $P$ auf einer Geraden $\mathfrak{G}$ zu betrachten. Er besitzt die anschauliche Dimension drei.

---

[1]) Vgl. dazu etwa W. KLINGENBERG, Lineare Algebra und Analytische Geometrie, Universität Mainz 1966, p. 299ff.